Basit Eşitsizlikler

1. Eşitsizlik ve Aralık Gösterimi

$<$, $>$, $\le$, $\ge$ sembolleriyle kurulan ifadelere **eşitsizlik** denir. Gerçel sayılarda çözüm kümesi genellikle bir **aralıktır**; dolu yuvarlak sınırın dahil, boş yuvarlak dahil olmadığını gösterir.

Ad	Gösterim	Eşitsizlik	Sayı doğrusu
Açık aralık	(a, b)	$a < x < b$	
Kapalı aralık	$[a, b]$	$a \le x \le b$	
Yarı açık	$[a, b)$	$a \le x < b$	
Yarı açık	$(a, b]$	$a < x \le b$	

Sonsuzluk (∞) bir sayı değildir; ∞ tarafı her zaman açık parantezle yazılır: $[2, \infty)$.

ÖRNEK

$-2 < x \le 5$ eşitsizliğini sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

ÇÖZÜM

$x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Cevap: 7

ÖRNEK

$[-3, 4) \cap (1, 8]$ kümesi nedir?

ÇÖZÜM

Ortak kısım: 1'den büyük, 4'ten küçük

Cevap: (1, 4)

2. Eşitsizlikte İşlem Kuralları

$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$

$a < b$, $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

$a < b$, $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

$a < b$ ve $b < c \Rightarrow a < c$ (geçişme)

Her tarafa aynı sayı eklenip çıkarılabilir; pozitif sayıyla çarpılıp bölünebilir. **Negatif sayıyla çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.**

ÖRNEK

$-2 < x < 7$ ise $5 - 2x$ ifadesi hangi aralıktadır? Kaç tam sayı değeri alır?

ÇÖZÜM

-2 ile çarp, yön değişir: $-14 < -2x < 4$

5 ekle: $-9 < 5 - 2x < 9 \Rightarrow -8, -7, \ldots, 8$

Cevap: (−9, 9) ; 17

3. Ters Alma ve Kuvvet Alma

$0 < a < x < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

Sınırlar **aynı işaretli** ise ters alınınca yön değişir. Sınırlar zıt işaretliyse (aralıkta 0 varsa) aralık ikiye ayrılır.

ÖRNEK

$2 < x < 6$ ise $\frac{1}{x}$ hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM

Sınırlar pozitif ⇒ ters al, yön değişir

Cevap: $1/6 < 1/x < 1/2$

Zıt işaretli sınır: $-m < x < n \Rightarrow 0 \le x^2 <$ (büyük)²

Aralıkta 0 varsa x^2'nin en küçük değeri 0'dır. Sınırlar negatifse kare alınınca yön değişir; pozitifse korunur. Tek kuvvet yönü hiç değiştirmez.

ÖRNEK

$-5 < x < 2$ ve $-4 \le y < -1$ ise x^2 ve y^2 hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM

x: 0 aralıkta ⇒ $0 \le x^2 < 25$

y: iki sınır negatif ⇒ yön değişir: $1 < y^2 \le 16$

Cevap: [0, 25) ; (1, 16]

4. Eşitsizliklerle Toplama, Çıkarma ve Çarpma

• **Aynı yönlü** eşitsizlikler taraf tarafa **toplanabilir**. • **Çıkarma yapılmaz**: çıkarılacak eşitsizlik −1 ile çarpılıp (yön değiştirilip) toplanır.

• **Çarpımda** (x · y) uç değerlerin dört çarpımı hesaplanır; en küçüğü alt, en büyüğü üst sınırdır. • Tam sayı sorularında sınırların dahil olup olmadığına dikkat edilir.

ÖRNEK

$1 < x < 4$ ve $-3 < y < 2$ ise $2x - y$ ve $x \cdot y$ hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM

$2 < 2x < 8$, $-2 < -y < 3 \Rightarrow 0 < 2x - y < 11$

Uç çarpımlar: -3, 2, -12, 8

Cevap: (0, 11) ; (−12, 8)

ÖRNEK

x ve y tam sayı, $-2 < x < 4$ ve $1 \le y < 5$ ise $x^2 + y^2$'nin en büyük ve en küçük değeri?

ÇÖZÜM

$x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{1, 2, 3, 4\}$

En büyük $3^2 + 4^2$; en küçük $0^2 + 1^2$

Cevap: 25 ; 1

5. Birinci Dereceden Eşitsizliklerin Çözümü

Denklem çözer gibi bilinmeyen bir tarafta toplanır; yalnızca **negatif sayıyla çarpma/bölmede** yön değiştirilir. Kesirli eşitsizliklerde paydalar (pozitif sayılar) EKOK ile çarpılarak atılır.

ÖRNEK

$\frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} > 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

6 ile çarp: $3(x-1) - 2(x+2) > 6$

$x - 7 > 6 \Rightarrow x > 13$

Cevap: (13, ∞)

ÖRNEK

$-1 < \frac{2x+3}{5} \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

ÇÖZÜM

$-5 < 2x + 3 \leq 15 \Rightarrow -8 < 2x \leq 12 \Rightarrow -4 < x \leq 6$

$-3, -2, \ldots, 6$

Cevap: 10

6. Sayıları Sıralama

$0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1 < \frac{1}{x}$

$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$



0 ile 1 arasındaki bir sayı kuvveti arttıkça küçülür; 1'den büyük bir sayı kuvveti arttıkça büyür. $-1 < x < 0$ için: $x < x^3 < 0 < x^2 < 1$. Emin olunamayan durumda aralıktan bir sayı seçilip denenir.

ÖRNEK

$a = 0{,}3$ ise a , a^2 , $\frac{1}{a}$ ve $\sqrt{a}$ sayılarını sıralayınız.

ÇÖZÜM

$a^2 = 0{,}09$, $\sqrt{0{,}3} \approx 0{,}55$, $\frac{1}{0{,}3} \approx 3{,}33$

Cevap: $a^2 < a < \sqrt{a} < 1/a$

7. Eşitsizlik Problemleri

"En az", "en çok", "-den fazla", "-den az" ifadeleri sırasıyla ≥ , ≤ , > , < ile yazılır. Kişi, araç, saat gibi çokluklar **tam sayı** olduğundan sonuç uygun tam sayıya yuvarlanır.

ÖRNEK

Bir otoparkta ilk saat 30 TL, sonraki her saat 15 TL'dir. 150 TL'den az ödemek isteyen biri aracını en çok kaç saat bırakabilir?

ÇÖZÜM

$30 + 15(t-1) < 150 \Rightarrow 15t < 135 \Rightarrow t < 9$

Cevap: 8 saat

ÖRNEK

Bir sınıftaki öğrenci sayısı x için $3x + 5 < 50$ ve $2x - 1 > 20$ ise x'in alabileceği kaç değer vardır?

ÇÖZÜM

$3x < 45 \Rightarrow x < 15$; $2x > 21 \Rightarrow x > 10{,}5$

$x = 11, 12, 13, 14$

Cevap: 4