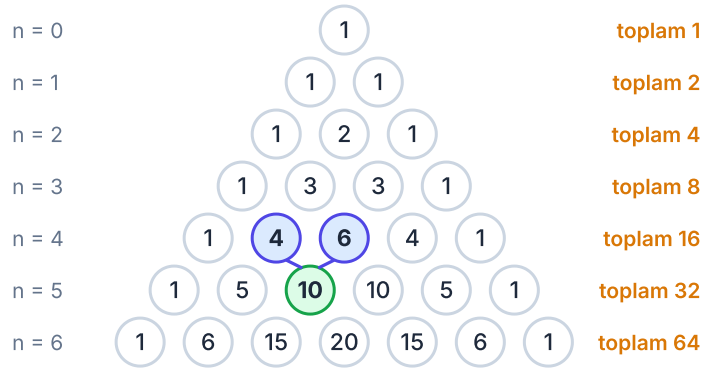
Binom ve Olasılık

1. Pascal Üçgeni



n. satırdaki sayılar $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ kombinasyonlarıdır.

- Her satır 1 ile başlar, 1 ile biter ve **simetriktir**.
- Her sayı, **üstündeki iki sayının toplamıdır**:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

- n. satırın toplamı **2^n**'dir: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

ÖRNEK

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{8}{5} = ?$$

ÇÖZÜM

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$$

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5} = 126$$

Cevap: 126

2. Binom Açılımı

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

- Açılımda **n + 1** terim vardır.
- x'in kuvveti n'den 0'a azalır, y'nin kuvveti 0'dan n'ye artar; her terimde kuvvetler toplamı **n**'dir.
- Katsayılar Pascal üçgeninin n. satırıdır.
- $(x - y)^n$ açılımında terimlerin işaretleri **+, −, +, −, ...** diye sırayla değişir.

ÖRNEK

$(x + 2)^4$ ifadesini açınız.

ÇÖZÜM

Katsayılar: 1, 4, 6, 4, 1

$x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$

Cevap: $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

3. Genel Terim

Baştan (r + 1). terim: $T_{r+1} = \binom{n}{r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

- $(x + y)^n$ açılımında **sondan k. terim** = baştan (n + 2 − k). terim.
- n çift ise **ortadaki terim** baştan $\frac{n}{2}$ + 1. terimdir.

Negatif terim parantez içinde, işaretiyle birlikte kuvvete alınır: $(2x - 1)^5$ için y = −1.

ÖRNEK

$(2x - 1)^5$ açılımında baştan 3. terim nedir?

ÇÖZÜM

$r + 1 = 3 \Rightarrow r = 2$

$\binom{5}{2} \cdot (2x)^3 \cdot (-1)^2 = 10 \cdot 8x^3$

Cevap: $80x^3$

ÖRNEK

$(x + 2y)^6$ açılımında ortadaki terim nedir?

ÇÖZÜM

7 terim var, ortadaki 4. terim $\Rightarrow r = 3$

$\binom{6}{3} \cdot x^3 \cdot (2y)^3 = 20 \cdot 8x^3y^3$

Cevap: $160x^3y^3$

4. Belirli Bir Terim, Sabit Terim ve Katsayılar Toplamı

Katsayılar toplamı: değişkenlere **1** yazılır

Sabit terim: değişkenin kuvveti **0** olan terim

$(ax + b)^n$ gibi ifadelerde sabit terim x = 0 yazılarak bulunur: b^n. İçinde x ve 1/x birlikte varsa genel terimde x'in kuvveti 0'a eşitlenir.

ÖRNEK

$(3x - 2)^5$ açılımında katsayılar toplamı ve sabit terim nedir?

ÇÖZÜM

$x = 1 \Rightarrow (3 - 2)^5 = 1$

$x = 0 \Rightarrow (-2)^5 = -32$

Cevap: 1 ; −32

ÖRNEK

$(x + 3)^5$ açılımında x^3'lü terimin katsayısı kaçtır?

ÇÖZÜM

$x^{5-r} = x^3 \Rightarrow r = 2$

$\binom{5}{2} \cdot 3^2 = 10 \cdot 9$

Cevap: 90

ÖRNEK

$(x^2 - \frac{1}{x})^6$ açılımında sabit terim kaçtır?

ÇÖZÜM

$T_{r+1} = \binom{6}{r} \cdot (x^2)^{6-r} \cdot (-\frac{1}{x})^r = (-1)^r \binom{6}{r} \cdot x^{12-3r}$

$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow (-1)^4 \cdot \binom{6}{4} = 15$

Cevap: 15

5. Deney, Örnek Uzay ve Olay

1. zar \ 2. zar	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	**8**
3	4	5	6	7	**8**	9
4	5	6	7	**8**	9	10
5	6	7	**8**	9	10	11
6	7	**8**	9	10	11	12

- **Deney:** sonucu şansa bağlı işlem (zar, para atma, torbadan top çekme).
- **Çıktı:** deneyin her bir sonucu.
- **Örnek uzay (E):** tüm çıktıların kümesi. Bir para: {Y, T} ; iki para: {YY, YT, TY, TT}.
- **Olay:** örnek uzayın her alt kümesi. ø **imkânsız olay**, E **kesin olay**dır.
- n para atılırsa s(E) = 2^n, n zar atılırsa s(E) = 6^n.

ÖRNEK

İki zar atılıyor. Üst yüzlerin toplamının 8 olma olasılığı?

ÇÖZÜM

s(E) = 36 ; tabloda toplamı 8 olan 5 hücre var

(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)

Cevap: 5/36

6. Olasılık Hesabı

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{tüm durumların sayısı}}$$

$0 \le P(A) \le 1$

$P(\varnothing) = 0$, $P(E) = 1$

$P(A') = 1 - P(A)$ (tümleyen)

$P(A) + P(A') = 1$

Bu formül, her çıktının gelme şansı eşit olan (**eş olumlu**) örnek uzaylarda kullanılır. Torbadaki toplar gibi aynı renkten birden fazla nesne varsa her nesne ayrı sayılır. Çoklu çekişte sayımlar kombinasyonla yapılır.

ÖRNEK

Bir kutuda 4 mavi, 3 yeşil, 2 sarı kalem var. Rastgele 2 kalem alınıyor. Birinin mavi, diğerinin sarı olma olasılığı?

ÇÖZÜM

$s(E) = \binom{9}{2} = 36$

$s(A) = \binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 8 \Rightarrow \frac{8}{36}$

Cevap: 2/9

ÖRNEK

3 para atılıyor. En az birinin yazı gelme olasılığı?

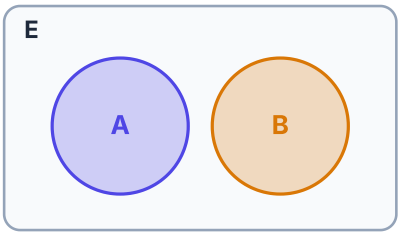
ÇÖZÜM

Tümleyen: hiç yazı yok ⇒ TTT ⇒ $\frac{1}{8}$

$1 - \frac{1}{8}$

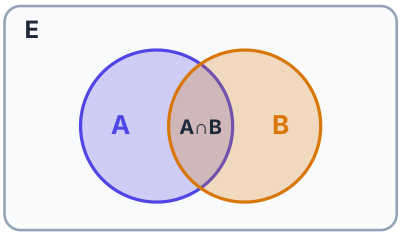
Cevap: 7/8

7. Ayrık ve Ayrık Olmayan Olaylar



Ayrık olaylar aynı anda gerçekleşemez: $A \cap B = \varnothing$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Ayrık olmayan olaylar aynı anda gerçekleşebilir: $A \cap B \neq \varnothing$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

"A veya B" olasılığı birleşim, "A ve B" olasılığı kesişimdir. Ortak kısım iki kez sayılmasın diye bir kez çıkarılır.

ÖRNEK

1'den 20'ye kadar numaralı kartlardan biri çekiliyor. Numaranın 3'e veya 4'e bölünme olasılığı?

ÇÖZÜM

3'e bölünen: 6 kart , 4'e bölünen: 5 kart , ikisine birden (12): 1 kart

$$\frac{6}{20} + \frac{5}{20} - \frac{1}{20} = \frac{10}{20}$$

Cevap: 1/2

8. Bağımsız Olaylar

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Birinin sonucu diğerinin olasılığını değiştirmiyorsa olaylar **bağımsızdır** (zar ve para, iki ayrı atıcı, **iadeli** çekiliş). Art arda olayların "ve" olasılığı çarpılarak bulunur.

İadesiz çekilişte ikinci çekilişin olasılığı birinciye bağlıdır: her adımda kalanlar üzerinden hesap yapılıp yine çarpılır.

ÖRNEK

İki atıcının hedefi vurma olasılıkları $\frac{2}{3}$ ve $\frac{3}{4}$.

İkisi birer atış yapıyor. Hedefin en az bir kez vurulma olasılığı?

ÇÖZÜM

İkisi de ıskalar: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$1 - \frac{1}{12}$

Cevap: 11/12

ÖRNEK

Torbada 5 kırmızı, 3 beyaz top var. Art arda 2 top çekiliyor. İkisinin de kırmızı olma olasılığı a) iadeli b) iadesiz?

ÇÖZÜM

a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

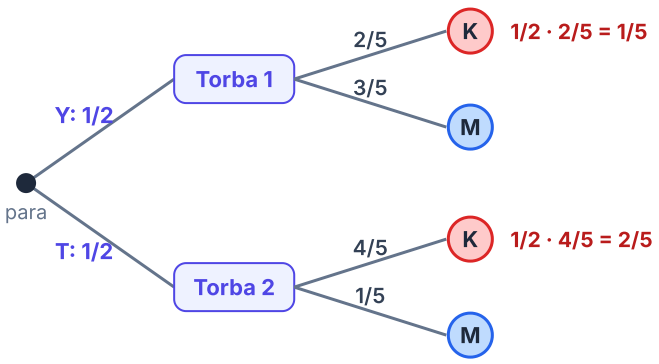
b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

Cevap: 25/64 ; 5/14

9. Koşullu Olasılık

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ (B olduğu bilindiğine göre A'nın olasılığı)

"... olduğu bilindiğine göre" ifadesi örnek uzayı **daraltır**: artık yalnızca B'nin elemanları sayılır. Aşamalı deneylerde **olasılık ağacı** çizilir; bir dal boyunca olasılıklar çarpılır, aynı sonuca giden dallar toplanır.



ÖRNEK

Torba 1'de 2 kırmızı 3 mavi, torba 2'de 4 kırmızı 1 mavi top var. Para atılıyor; yazı gelirse torba 1'den, tura gelirse torba 2'den bir top çekiliyor. a) Topun kırmızı olma olasılığı? b) Kırmızı olduğu bilindiğine göre torba 1'den çekilmiş olma olasılığı?

ÇÖZÜM

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$

Cevap: 3/5 ; 1/3

	Gözlüklü	Gözlüksüz	Toplam
Kız	6	10	16
Erkek	4	10	14
Toplam	10	20	30

ÖRNEK

Tablodaki sınıftan seçilen öğrencinin gözlüklü olduğu biliniyor. Kız olma olasılığı?

ÇÖZÜM

Örnek uzay daralır: gözlüklüler = 10

Bunlardan kız olan 6 ⇒ $\frac{6}{10}$

Cevap: 3/5