Diziler

1. Dizi Kavramı

$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$

Pozitif tam sayılarda tanımlı, gerçel değerli fonksiyona **dizi** denir. a_n **genel terim**, n ise terimin sırasıdır (indis).

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımlı olmalıdır. Payda sıfır olursa ya da kök/logaritma tanımsız kalırsa dizi belirtmez. Genel terimi verilmeyen sayı grupları dizi değildir.

ÖRNEK

$a_n = \dfrac{n+4}{n-3}$ bir dizi midir?

ÇÖZÜM

$n = 3$ için payda 0 olur, a_3 tanımsızdır.

Her pozitif tam sayıda tanımlı değil.

Cevap: Dizi değildir

2. Sonlu Dizi ve Sabit Dizi

Sonlu dizi: tanım kümesi {1, 2, ..., k} olan dizi. **Sabit dizi:** bütün terimleri aynı sayı olan dizi: $a_n = c$.

Kesirli genel terim $\dfrac{an+b}{cn+d}$ sabit dizi ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ olur; terim bu orandır.

ÖRNEK

$a_n = \dfrac{kn+6}{2n+3}$ sabit dizi ise k ve a_5 kaçtır?

ÇÖZÜM

$\dfrac{k}{2} = \dfrac{6}{3} \Rightarrow k = 4$

$a_n = \dfrac{4n+6}{2n+3} = 2 \Rightarrow a_5 = 2$

Cevap: k = 4 , $a_5 = 2$

3. Eşit Diziler

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n \Rightarrow (a_n) = (b_n)$

İki dizi, karşılıklı bütün terimleri eşitse eşittir; genel terimler sadeleştirilip karşılaştırılır.

ÖRNEK

$a_n = \dfrac{n^2-4}{n+k}$ ve $b_n = n-2$ eşit diziler ise k kaçtır?

ÇÖZÜM

$\dfrac{(n-2)(n+2)}{n+k} = n-2$

$n + k = n + 2 \Rightarrow k = 2$

Cevap: 2

4. İndirgeme Bağıntısı

Bir terimi kendinden önceki terim(ler) cinsinden veren kurala **indirgeme bağıntısı** denir. İlk terimden başlayıp adım adım ilerlenir.

ÖRNEK

$a_{n+1} = a_n + 2n$, $a_1 = 3$ ise $a_5 = ?$

ÇÖZÜM

$a_2 = 3 + 2 = 5$, $a_3 = 5 + 4 = 9$

$a_4 = 9 + 6 = 15$, $a_5 = 15 + 8 = 23$

Cevap: 23

ÖRNEK

$a_{n+1} = 2a_n - 1$, $a_1 = 3$ ise $a_4 = ?$

ÇÖZÜM

$a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 17$

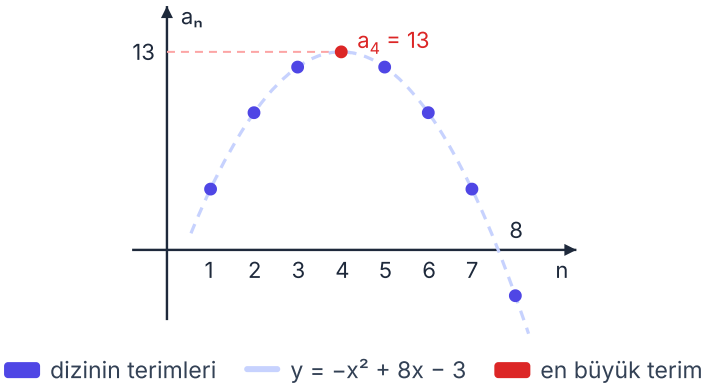
Cevap: 17

5. Dizinin Terimlerini İnceleme

$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow$ artan

$a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow$ azalan

Dizi bir fonksiyondur ama grafiği **tek tek noktalardan** oluşur (n = 1, 2, 3, ...). Bu yüzden en büyük/en küçük terim aranırken n mutlaka **pozitif tam sayı** seçilir. İkinci dereceden genel terimde tepe noktasının apsisi −b / 2a'ya en yakın tam sayıya bakılır.



ÖRNEK

$a_n = -n^2 + 8n - 3$ dizisinin en büyük terimi kaçtır? Kaç terimi pozitiftir?

ÇÖZÜM

Tepe: $n = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$

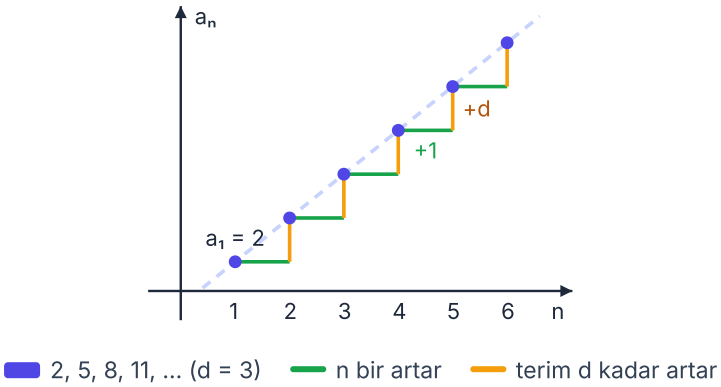
$a_4 = -16 + 32 - 3 = 13$

$a_7 = 4 > 0$, $a_8 = -3 < 0$

n = 1, 2, …, 7 terimleri pozitif

Cevap: 13 ; 7 terim

6. Aritmetik Dizi



$a_{n+1} - a_n = d$ (ortak fark)

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = a_p + (n-p) \cdot d$

$d = \frac{a_n - a_p}{n - p}$

Terimler bir doğru üzerindeki noktalardır: n her 1 arttığında terim **d** kadar artar. d > 0 artan, d < 0 azalan, d = 0 sabit dizidir.

ÖRNEK

Aritmetik dizide $a_5 = 12$ ve $a_{12} = 40$ ise $a_{20} = ?$

ÇÖZÜM

$d = \frac{40 - 12}{12 - 5} = \frac{28}{7} = 4$

$a_{20} = a_{12} + 8d = 40 + 32 = 72$

Cevap: 72

ÖRNEK

İlk terimi 7, ortak farkı −3 olan aritmetik dizinin kaçıncı terimi −50'dir?

ÇÖZÜM

$7 + (n-1)(-3) = -50$

$(n-1) \cdot 3 = 57 \Rightarrow n - 1 = 19 \Rightarrow n = 20$

Cevap: 20. terim

7. Aritmetik Dizinin Özellikleri

$$a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2}$$

$$a_k + a_m = a_p + a_r \ (k + m = p + r)$$

- Her terim, kendisinden **eşit uzaklıktaki** iki terimin aritmetik ortalamasıdır. a, b, c ardışık terimlerse 2b = a + c.
- İndisler toplamı eşit olan terimlerin toplamı da eşittir: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$
- a ile b arasına k terim yerleştirilirse toplam k + 2 terim olur ve $d = \frac{b-a}{k+1}$.

ÖRNEK

Aritmetik dizide $a_2 + a_6 + a_{10} = 30$ ise $a_1 + a_{11} = ?$

ÇÖZÜM

$a_2 + a_{10} = 2a_6 \Rightarrow 3a_6 = 30 \Rightarrow a_6 = 10$

$a_1 + a_{11} = 2a_6 = 20$

Cevap: 20

ÖRNEK

7 ile 43 arasına 8 terim yerleştirilerek aritmetik dizi oluşturuluyor. Dizinin 5. terimi kaçtır?

ÇÖZÜM

$d = \frac{43-7}{8+1} = \frac{36}{9} = 4$

$a_5 = 7 + 4 \cdot 4 = 23$

Cevap: 23

8. Aritmetik Dizide İlk n Terim Toplamı

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)\,d]$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$, $a_1 = S_1$

Gauss yöntemi: toplam baştan ve sondan eşleştirilir; her çiftin toplamı $a_1 + a_n$, çift sayısı n / 2'dir.

Terim sayısı = (son terim − ilk terim) / d + 1

ÖRNEK

Bir salonda ilk sırada 12 koltuk var, her sırada bir öncekinden 2 fazla koltuk bulunuyor. 15 sıralı salonda kaç koltuk vardır?

ÇÖZÜM

$a_{15} = 12 + 14 \cdot 2 = 40$

$S_{15} = \frac{15 \cdot (12 + 40)}{2} = 15 \cdot 26 = 390$

Cevap: 390

ÖRNEK

İlk n terim toplamı $S_n = n^2 + 3n$ olan dizide $a_{10} = ?$

ÇÖZÜM

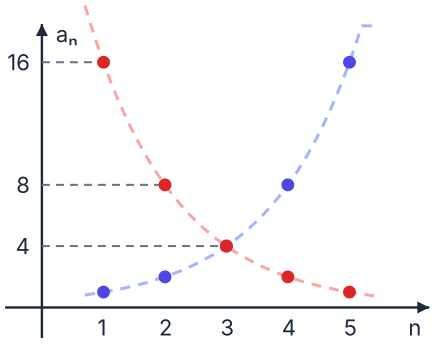
$S_{10} = 100 + 30 = 130$

$S_9 = 81 + 27 = 108$

$a_{10} = 130 - 108 = 22$

Cevap: 22

9. Geometrik Dizi



1, 2, 4, 8, 16 (r = 2) 16, 8, 4, 2, 1 (r = ½)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (ortak çarpan)

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_n = a_p \cdot r^{n-p}$

Her terim bir öncekinin **r katı**dır; terimler üstel bir eğri üzerindedir. $a_1 > 0$ iken $r > 1$ artan, $0 < r < 1$ azalan; $r < 0$ ise terimlerin işareti sırayla değişir.

ÖRNEK

Geometrik dizide $a_2 = 6$ ve $a_5 = 48$ ise $a_7 = ?$

ÇÖZÜM

$r^3 = \frac{48}{6} = 8 \Rightarrow r = 2$

$a_7 = a_5 \cdot r^2 = 48 \cdot 4 = 192$

Cevap: 192

ÖRNEK

$x - 1$, $x + 3$, $3x + 1$ geometrik dizinin ardışık terimleri ise $x = ?$

ÇÖZÜM

$(x + 3)^2 = (x - 1)(3x + 1)$

$x^2 + 6x + 9 = 3x^2 - 2x - 1$

$2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ veya $x = -1$

Cevap: 5 veya −1

10. Geometrik Dizinin Özellikleri

$a_p^2 = a_{p-k} \cdot a_{p+k}$

$a_k \cdot a_m = a_p \cdot a_r$ $(k + m = p + r)$

- a, b, c ardışık terimlerse **$b^2 = a \cdot c$** (b, a ile c'nin geometrik ortasıdır).
- a ile b arasına k terim yerleştirilirse $r^{k+1} = \frac{b}{a}$.

ÖRNEK

Terimleri pozitif geometrik dizide $a_3 \cdot a_9 = 36$ ise $a_6 = ?$

ÇÖZÜM

$a_6^2 = a_3 \cdot a_9 = 36$

$a_6 > 0 \Rightarrow a_6 = 6$

Cevap: 6

ÖRNEK

2 ile 162 arasına 3 terim yerleştirilerek artan geometrik dizi oluşturuluyor. Bu terimler nedir?

ÇÖZÜM

$r^4 = \frac{162}{2} = 81 \Rightarrow r = 3$

2 , **6 , 18 , 54** , 162

Cevap: 6, 18, 54

11. Geometrik Dizide İlk n Terim Toplamı

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$

$r = 1$ ise bütün terimler eşittir: $S_n = n \cdot a_1$. Terim sayısı $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ eşitliğinden bulunur.

ÖRNEK

$3 + 6 + 12 + \ldots + 384$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$384 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow n = 8$

$$S_8 = 3 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 255 = 765$$

Cevap: 765

ÖRNEK

Ali kumbarasına ilk gün 5 TL atıyor, sonraki her gün bir önceki günün 2 katını atıyor. 6 günde kaç TL biriktirir?

ÇÖZÜM

$a_1 = 5$, $r = 2$, $n = 6$

$S_6 = 5 \cdot (2^6 - 1) = 5 \cdot 63 = 315$

Cevap: 315 TL

12. Fibonacci Dizisi ve Üçgensel Sayılar

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ , } F_1 = F_2 = 1$$

Fibonacci: her terim önceki iki terimin toplamıdır.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

ÖRNEK

…, a, 21, b, 55, … Fibonacci dizisinin ardışık terimleri ise $a \cdot b = ?$

ÇÖZÜM

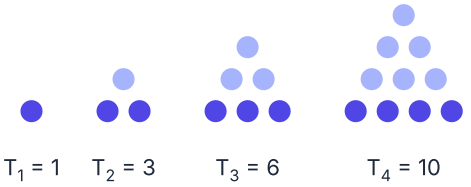
$b = 55 - 21 = 34$, $a = 34 - 21 = 13$

$a \cdot b = 13 \cdot 34 = 442$

Cevap: 442

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Üçgensel sayılar: noktalarla üçgen oluşturan sayılardır; her adımda alta bir sıra eklenir: $T_n = T_{n-1} + n$.



ÖRNEK

Kaçıncı üçgensel sayı 78'dir?

ÇÖZÜM

$$\frac{n(n+1)}{2} = 78 \Rightarrow n(n+1) = 156 = 12 \cdot 13$$

$n = 12$

Cevap: 12.