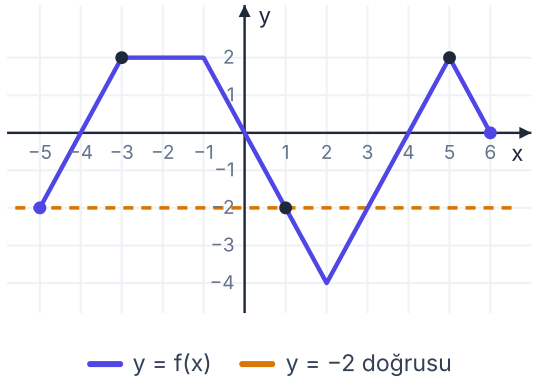
Fonksiyon Uygulamaları

1. Grafikten Fonksiyon Değeri Okuma



- **f(a):** x = a'dan dikey çıkılır, grafiğe değilen noktanın **ordinatı** okunur.
- **f(x) = 0**'ın kökleri: grafiğin **x eksenini kestiği** noktaların apsisleri.
- **f(0):** grafiğin **y eksenini kestiği** nokta.
- **f(x) = k**'nın çözüm sayısı: y = k **yatay doğrusunun** grafiği kestiği nokta sayısı.

Tanım kümesi grafiğin x eksenindeki izdüşümü, görüntü kümesi y eksenindeki izdüşümüdür.

ÖRNEK

Grafiği verilen f için f(−3) + f(1) + f(5) = ?

ÇÖZÜM

2 + (−2) + 2

Cevap: 2

ÖRNEK

f(x) = 0 ve f(x) = −2 denklemlerinin kaçar kökü vardır?

ÇÖZÜM

x eksenini kestiği yerler: −4, 0, 4, 6

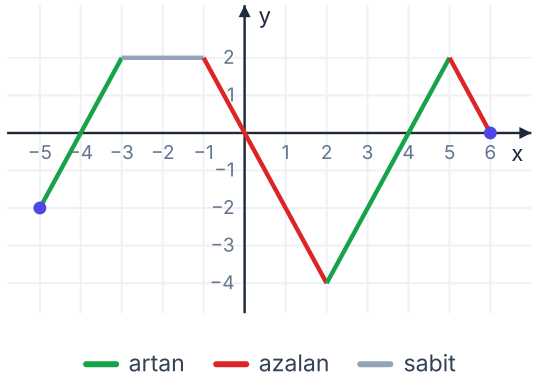
y = −2 doğrusu: x = −5, 1, 3

Cevap: 4 ; 3

2. Artan, Azalan ve Sabit Fonksiyon

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$: artan

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$: azalan



Grafik soldan sağa doğru **yükseliyorsa artan**, **alçalıyorsa azalan**, yatay ise **sabittir**.

- Artan: (−5, −3) ve (2, 5)
- Azalan: (−1, 2) ve (5, 6)
- Sabit: (−3, −1)

Doğrusal fonksiyon f(x) = mx + n: m > 0 ise her yerde artan, m < 0 ise her yerde azalan, m = 0 ise sabittir.

ÖRNEK

Grafikteki f'nin azalan olduğu aralıklarda kaç tam sayı vardır?

ÇÖZÜM

(−1, 2) → 0, 1 ; (5, 6) → yok

Cevap: 2

ÖRNEK

f(x) = 5 − 3x , g(x) = 2x + 1 için f, g ve f + g artan mı, azalan mı?

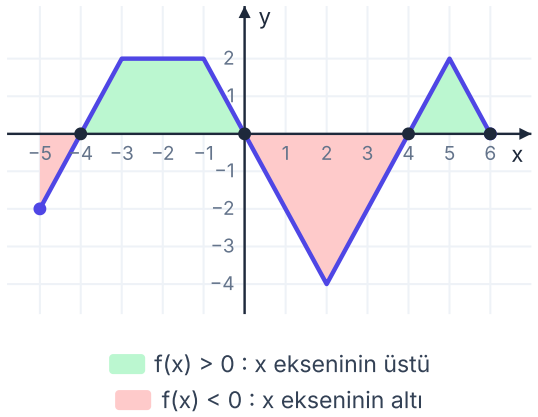
ÇÖZÜM

f: eğim −3 azalan ; g: eğim 2 artan

(f + g)(x) = 6 − x : eğim −1

Cevap: azalan, artan, azalan

3. Fonksiyonun Pozitif ve Negatif Olduğu Aralıklar



Grafiğin **x ekseninin üstünde** kaldığı aralıklarda f(x) > 0 (**pozitif**), **altında** kaldığı aralıklarda f(x) < 0 (**negatif**). x eksenini kestiği noktalarda f(x) = 0.

- Pozitif: (−4, 0) ∪ (4, 6)
- Negatif: [−5, −4) ∪ (0, 4)

"Azalan ve pozitif" gibi iki koşul birlikte istenirse iki aralık kümesinin kesişimi alınır.

ÖRNEK

f(x) > 0 eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı?

ÇÖZÜM

(−4, 0) → −3, −2, −1 ; (4, 6) → 5

−3 − 2 − 1 + 5

Cevap: −1

ÖRNEK

f'nin hem azalan hem pozitif olduğu en geniş aralıklar?

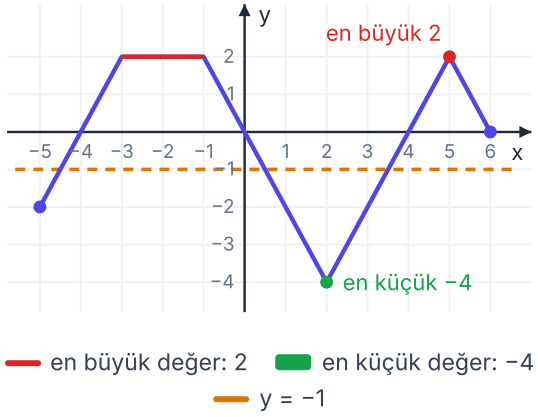
ÇÖZÜM

Azalan: (−1, 2), (5, 6) ; Pozitif: (−4, 0), (4, 6)

Kesişim

Cevap: (−1, 0) ve (5, 6)

4. Maksimum ve Minimum Değer



- Grafiğin **en yüksek** noktasının ordinatı fonksiyonun **en büyük (maksimum)** değeri, **en alçak** noktasının ordinatı **en küçük (minimum)** değeridir.
- Görüntü kümesi: [en küçük, en büyük] = [−4, 2]
- Artandan azalana geçilen nokta **yerel maksimum**, azalandan artana geçilen nokta **yerel minimum** noktasıdır.

ÖRNEK

f(x) = k denkleminin 3 farklı kökü olması için k'nın alabileceği tam sayı değerleri?

ÇÖZÜM

Yatay doğruyu yukarı-aşağı kaydır: k = −2 ⇒ x = −5, 1, 3 (3 kök)

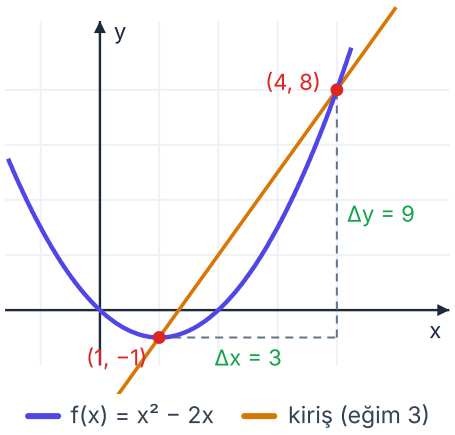
−2 < k < 0 ⇒ 3 kök (şekilde y = −1) ; 0 ≤ k < 2 ⇒ 4 kök ; k = 2 ⇒ sonsuz ; k < −2 ⇒ en çok 2 kök

−2 ≤ k < 0

Cevap: k = −2 ve k = −1

5. Ortalama Değişim Hızı

[a, b] aralığında ortalama değişim hızı = $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



Ortalama değişim hızı, grafiğin (a, f(a)) ve (b, f(b)) noktalarını birleştiren **kirişin eğimidir**.

- Doğrusal fonksiyonda her aralıkta aynıdır ve **eğime** eşittir.
- Pozitifse fonksiyon o aralıkta ortalamada artmış, negatifse azalmıştır.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun [1, 4] aralığındaki ortalama değişim hızı?

ÇÖZÜM

$f(1) = -1$, $f(4) = 16 - 8 = 8$

$$\frac{8 - (-1)}{4 - 1} = \frac{9}{3}$$

Cevap: 3

ÖRNEK

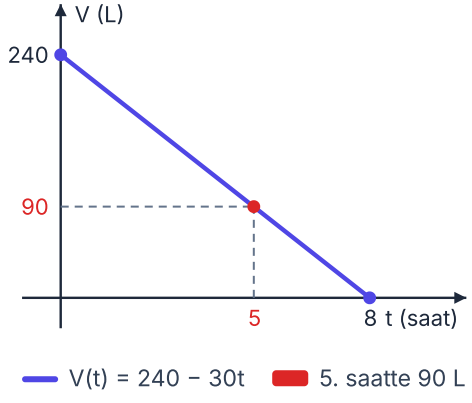
Bir depoda 2. saatte 120 L, 5. saatte 300 L su vardır. Bu aralıkta suyun ortalama artış hızı?

ÇÖZÜM

$$\frac{300 - 120}{5 - 2} = \frac{180}{3}$$

Cevap: 60 L/saat

6. Grafikle Modelleme (Doğrusal Model)



Gerçek hayattaki bir değişim düzgün (sabit hızla) oluyorsa grafiği bir **doğrudur**: f(x) = mx + n.

- **n**: başlangıç değeri (doğrunun y eksenini kestiği nokta)
- **m**: birim zamandaki değişim (eğim). Azalıyorsa m < 0.

ÖRNEK

240 L su dolu bir depo sabit hızla boşalıyor ve 8 saatte tamamen boşalıyor. Depoda kaç saat sonra 90 L su kalır?

ÇÖZÜM

$m = \frac{0 - 240}{8 - 0} = -30 \Rightarrow V(t) = 240 - 30t$

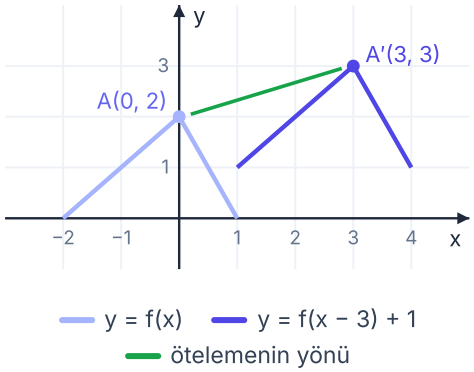
$240 - 30t = 90 \Rightarrow 30t = 150$

Cevap: 5 saat

7. Fonksiyon Dönüşümleri: Öteleme

$y = f(x) + k$: k birim **yukarı** ($k < 0$ ise aşağı)

$y = f(x - a)$: a birim **sağa** ($a < 0$ ise sola)



Grafiğin şekli değişmez, yalnızca yeri değişir: her (x, y) noktası **(x + a, y + k)** noktasına gider.

Dikkat: f(x − 3) sağa, f(x + 3) sola öteler; içerideki işaret ters çalışır.

ÖRNEK

f'nin grafiği (2, 5) noktasından geçiyor. $y = f(x + 1) - 3$ grafiği hangi noktadan geçer?

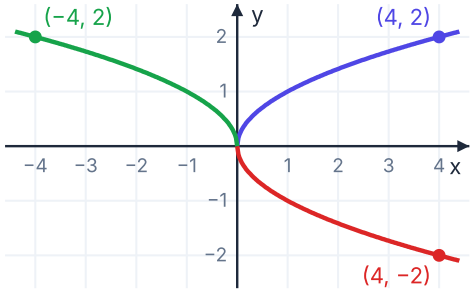
ÇÖZÜM

1 birim sola, 3 birim aşağı

$(2 - 1, 5 - 3)$

Cevap: (1, 2)

8. Fonksiyon Dönüşümleri: Yansıma (Simetri)



$y = -f(x)$: **x eksenine** göre simetri

$y = f(-x)$: **y eksenine** göre simetri

$y = -f(-x)$: **orijine** göre simetri

(x, y) noktası sırasıyla (x, −y), (−x, y) ve (−x, −y) noktasına gider.

ÖRNEK

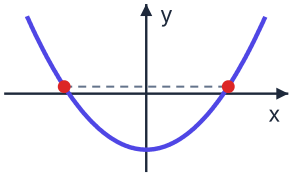
$f(x) = x^2 - 4x + 1$ grafiğinin y eksenine göre simetriği olan grafiğin denklemi?

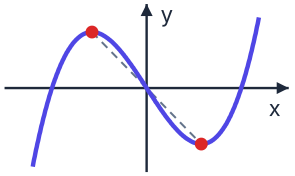
ÇÖZÜM

x yerine −x yazılır: $(-x)^2 - 4(-x) + 1$

Cevap: $y = x^2 + 4x + 1$

9. Tek ve Çift Fonksiyonlar





$f(-x) = f(x)$: **çift** fonksiyon

Grafik **y eksenine** göre simetriktir. Örn: x^2, x^4, $|x|$, sabit fonksiyon.

$f(-x) = -f(x)$: **tek** fonksiyon

Grafik **orijine** göre simetriktir. Örn: x, x^3, x^5. Tanımlıysa $f(0) = 0$.

Polinomda yalnızca çift kuvvetler (ve sabit) varsa çift, yalnızca tek kuvvetler varsa tek fonksiyondur; ikisi karışıksa ne tek ne çifttir.

ÖRNEK

$f(x) = (a-1)x^3 + (b+2)x + 3x^2$ çift fonksiyon ise a ve b?

ÇÖZÜM

Tek kuvvetlerin katsayıları 0 olmalı

$a - 1 = 0$, $b + 2 = 0$

Cevap: a = 1 , b = −2

ÖRNEK

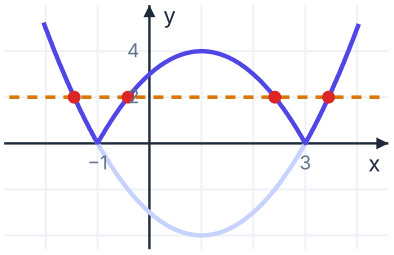
f tek, g çift fonksiyon; $f(3) = 7$ ve $g(2) = 5$ ise $f(-3) + g(-2) = ?$

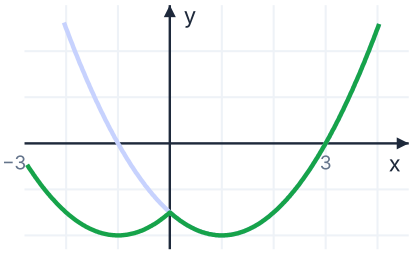
ÇÖZÜM

$f(-3) = -f(3) = -7$, $g(-2) = g(2) = 5$

Cevap: −2

10. y = |f(x)| ve y = f(|x|) Grafikleri





y = f(x) y = |f(x)| y = 2

y = |f(x)|: x ekseninin **altında** kalan parçalar x eksenine göre **yukarı yansıtılır**; grafik hiç x ekseninin altına inmez.

y = f(x) y = f(|x|)

y = f(|x|): y ekseninin **sağındaki** parça korunur, solu silinir; sağ parça y eksenine göre **sola yansıtılır** (çift fonksiyon olur).

Grafiklerde $f(x) = x^2 - 2x - 3$ kullanıldı.

ÖRNEK

$|x^2 - 2x - 3| = 2$ denkleminin kaç farklı gerçel kökü vardır?

ÇÖZÜM

Şekilde $y = 2$ doğrusu $y = |f(x)|$ grafiğini 4 noktada kesiyor.

Cebirle: $x^2 - 2x - 3 = 2$ (2 kök) veya $x^2 - 2x - 3 = -2$ (2 kök)

Cevap: 4