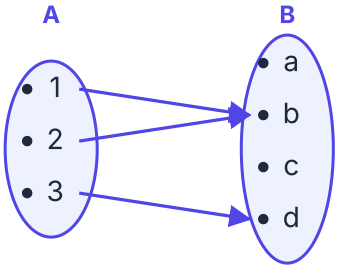
Fonksiyonlar

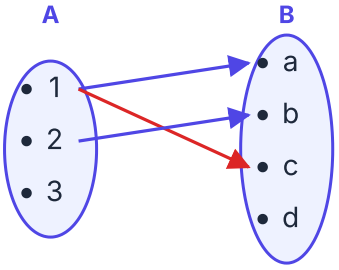
1. Fonksiyon Kavramı

$$f : A \to B \, , \, x \mapsto f(x)$$

A'nın **her elemanı** B'nin **bir ve yalnız bir** elemanıyla eşleniyorsa bu bağıntı bir fonksiyondur. A **tanım kümesi**, B **değer kümesi**, f(A) **görüntü kümesi**dir (f(A) ⊆ B).



Fonksiyon ✓ (f(A) = {b, d})



Fonksiyon değil × (1 iki kez eşlenmiş, 3 boşta)

B'de boşta kalan ya da birden fazla ok alan eleman olabilir; kısıt yalnızca A'nın elemanları içindir.

ÖRNEK

$f(2x - 1) = 4x + 3$ ise $f(5) = ?$

ÇÖZÜM

$2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$

$f(5) = 4 \cdot 3 + 3$

Cevap: 15

ÖRNEK

$f(2x - 1) = 4x + 3$ ise $f(x) = ?$

ÇÖZÜM

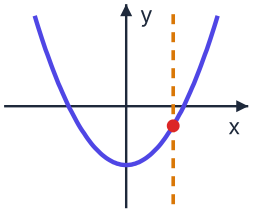
$2x - 1 = t \Rightarrow x = \dfrac{t + 1}{2}$

$f(t) = 2(t + 1) + 3 = 2t + 5$

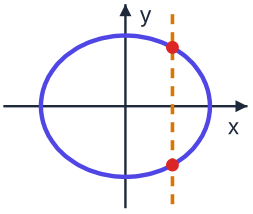
Cevap: f(x) = 2x + 5

2. Grafiğin Fonksiyon Belirtmesi (Dikey Doğru Testi)

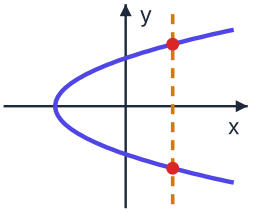
x eksenine dik çizilen **her doğru** grafiği **en çok bir noktada** kesiyorsa grafik bir fonksiyon belirtir. İki ya da daha fazla noktada kesen bir dikey doğru varsa fonksiyon değildir (bir x'e iki y karşılık gelir).



$y = x^2 - 1{,}5$: fonksiyon ✓



çember: fonksiyon değil ×



$x = y^2 - 1{,}5$: fonksiyon değil ×

Fonksiyonun tanım kümesi verilmişse, tanım kümesindeki her x için dikey doğrunun grafiği **mutlaka** kesmesi de gerekir.

ÖRNEK

$y = x^2$, $x = y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = |x|$ bağıntılarından hangileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye fonksiyondur?

ÇÖZÜM

$x = y^2$ ve çember: bir x'e iki y karşılık gelir

$y = x^2$ ve $y = |x|$: her x'e tek y

Cevap: $y = x^2$ ve $y = |x|$

3. Fonksiyon Sayısı

s(A) = m , s(B) = n olsun. A'nın her elemanı için B'de n seçenek vardır:

A → B fonksiyon sayısı: n^m

Birebir ve örten (m = n): m!

A'dan B'ye bağıntı sayısı: $2^{m \cdot n}$

Birebir fonksiyon sayısı: P(n, m) (m ≤ n)

Sabit fonksiyon sayısı: n

m < n ise örten fonksiyon yoktur

ÖRNEK

A = {a, b, c} , B = {1, 2, 3, 4}. A'dan B'ye kaç fonksiyon, kaç birebir fonksiyon tanımlanır?

ÇÖZÜM

$4^3 = 64$; $P(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Cevap: 64 ; 24

ÖRNEK

Aynı kümelerle f(a) = 1 olan kaç fonksiyon tanımlanır?

ÇÖZÜM

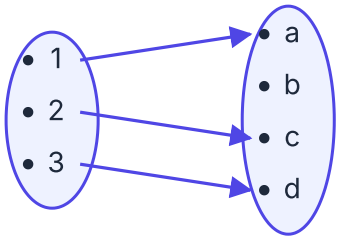
a sabitlendi; b ve c için 4'er seçenek

$4 \cdot 4$

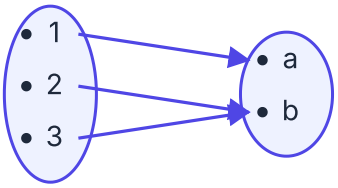
Cevap: 16

4. Birebir, Örten ve İçine Fonksiyon

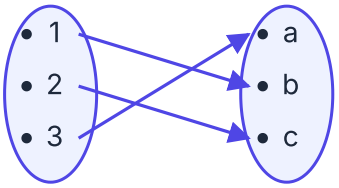
- **Birebir:** farklı elemanların görüntüleri farklıdır. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- **Örten:** görüntü kümesi değer kümesine eşittir: f(A) = B (B'de boşta eleman yok).
- **İçine:** örten olmayan fonksiyon (B'de en az bir boşta eleman var).
- Grafikte **yatay doğru testi:** her yatay doğru grafiği en çok bir noktada kesiyorsa birebirdir.



birebir, içine



örten (birebir değil)



birebir ve örten

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ birebir ve örten midir?

ÇÖZÜM

Eğim ≠ 0 olan doğru: her y için tek x

Cevap: Evet

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ birebir midir, örten midir?

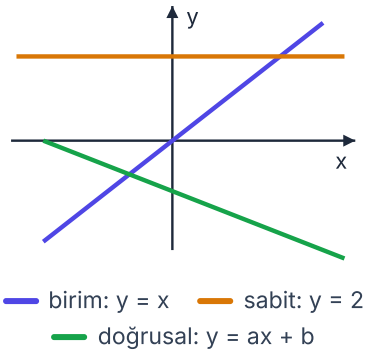
ÇÖZÜM

f(−2) = f(2) ⇒ birebir değil

Negatif değer almaz ⇒ örten değil

Cevap: İkisi de değil

5. Birim, Sabit ve Doğrusal Fonksiyon



Birim (özdeş): $I(x) = x$

Her eleman kendisine eşlenir.

Sabit: $f(x) = c$

Bütün elemanlar aynı elemana eşlenir; grafiği yatay doğrudur.

Doğrusal: $f(x) = ax + b$

Grafiği eğik doğrudur; a eğim, b y eksenini kestiği nokta.

ÖRNEK

$f(x) = (a - 2)x^2 + (b + 1)x + 5$ sabit fonksiyon ise $a + b = ?$

ÇÖZÜM

$a - 2 = 0$, $b + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$, $b = -1$

Cevap: 1

ÖRNEK

Doğrusal f için $f(1) = 5$ ve $f(3) = 11$ ise $f(5) = ?$

ÇÖZÜM

$a = \frac{11 - 5}{3 - 1} = 3$, $f(x) = 3x + 2$

$f(5) = 15 + 2$

Cevap: 17

6. Fonksiyonlarda Dört İşlem

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

İşlem yapılan fonksiyonun tanım kümesi, f ve g'nin tanım kümelerinin **kesişimidir**; bölmede ayrıca $g(x) = 0$ yapan değerler çıkarılır.

ÖRNEK

$f = \{(1, 3), (2, 5), (4, -1)\}$, $g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 4)\}$ ise $f + g$ ve f / g nedir?

ÇÖZÜM

Ortak tanım: $\{1, 2\}$

$f + g = \{(1, 5), (2, 5)\}$

$g(2) = 0 \Rightarrow f / g = \{(1, \frac{3}{2})\}$

Cevap: yukarıdaki gibi

ÖRNEK

$f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ ise $(f \cdot g)(2)$ kaçtır? f / g hangi x'lerde tanımsızdır?

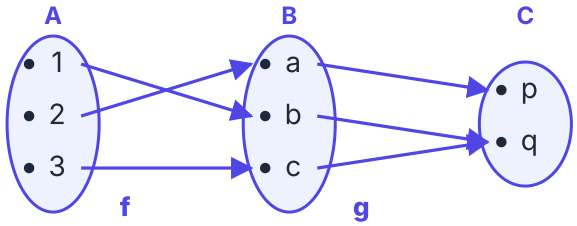
ÇÖZÜM

$f(2) \cdot g(2) = 4 \cdot 3 = 12$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Cevap: 12 ; x = ±1

7. Bileşke Fonksiyon



(gof)(1) = g(f(1)) = g(b) = q

$(gof)(x) = g(f(x))$

Önce **sağdaki** fonksiyon (f), sonra soldaki (g) uygulanır.

- Genelde gof ≠ fog (değişme özelliği yok).
- fo(goh) = (fog)oh (birleşme özelliği var).
- foI = Iof = f , $fof^{-1} = f^{-1}of = I$

ÖRNEK

$f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 3$ ise (gof)(1) ve (fog)(1)?

ÇÖZÜM

$(gof)(1) = g(3) = 9 - 3 = 6$

$(fog)(1) = f(-2) = -4 + 1 = -3$

Cevap: 6 ; −3

ÖRNEK

$f(x) = 2x - 3$ ve $(fog)(x) = 6x + 1$ ise $g(x) = ?$

ÇÖZÜM

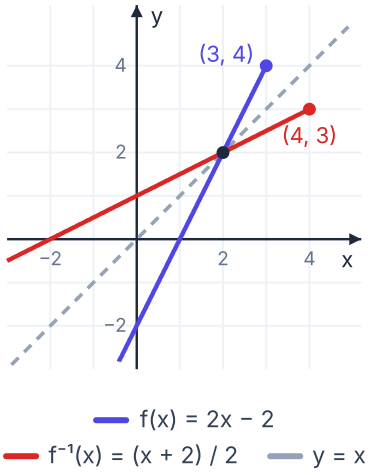
$f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 6x + 1$

$2g(x) = 6x + 4$

Cevap: g(x) = 3x + 2

8. Ters Fonksiyon

$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$



Yalnızca **birebir ve örten** fonksiyonların tersi vardır. f ile f^{-1} grafikleri **y = x doğrusuna göre simetriktir**: (3, 4) ↔ (4, 3).

Bulma: y = f(x) yazılır, x yalnız bırakılır, sonra x ile y yer değiştirir.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$(fog)^{-1} = g^{-1}\ o\ f^{-1}$, $(f^{-1})^{-1} = f$

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ ise $f^{-1}(5) = ?$

ÇÖZÜM

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2} \Rightarrow f^{-1}(5) = \dfrac{16}{3}$

Kısa yol: f(a) = 5 ⇒ 2a + 1 = 5a − 15 ⇒ a = 16/3

Cevap: 16/3

ÖRNEK

$f(x) = 3x - 4$ ise $f^{-1}(5) + f(f^{-1}(7)) = ?$

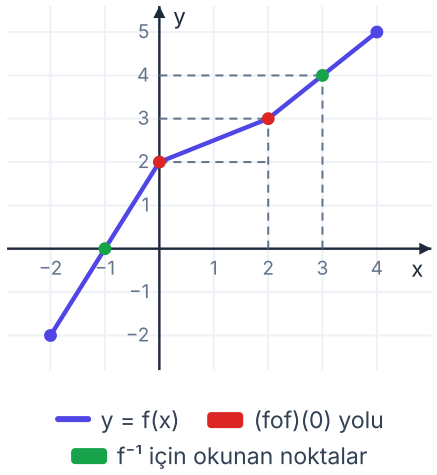
ÇÖZÜM

$f(a) = 5 \Rightarrow 3a - 4 = 5 \Rightarrow a = 3$

$f(f^{-1}(7)) = 7 \Rightarrow 3 + 7$

Cevap: 10

9. Grafikten Bileşke ve Ters Bulma



- **f(a):** x = a'dan grafiğe çıkılır, y okunur.
- **$f^{-1}(b)$:** y = b'den yatay gidilir, grafiğe değilen noktanın **x**'i okunur.
- **(fof)(a):** önce f(a) okunur, bulunan değer tekrar x eksenine taşınır, yeniden okunur.

ÖRNEK

Grafiği verilen f için $(fof)(0) + f^{-1}(4) + f^{-1}(0) = ?$

ÇÖZÜM

$f(0) = 2$, $f(2) = 3 \Rightarrow (fof)(0) = 3$

$f(3) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3$; $f(-1) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = -1$

$3 + 3 + (-1)$

Cevap: 5

10. Permütasyon Fonksiyonu

A'dan A'ya tanımlı **birebir ve örten** fonksiyonlara permütasyon fonksiyonu denir. Üst satır elemanlar, alt satır görüntüleridir. s(A) = n ise n! tane permütasyon fonksiyonu vardır.

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- **Ters:** satırların yeri değiştirilir (f^{-1}'de 3 → 1, 1 → 2 ...).
- **Bileşke:** sağdakinden başlanır, (fog)(x) = f(g(x)).

ÖRNEK

Yukarıdaki f ve g için $(fog)(1)$ ve $(gof)(2) = ?$

ÇÖZÜM

$(fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 2$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(1) = 4$

Cevap: 2 ; 4

ÖRNEK

Yukarıdaki f için f^{-1} nedir? $f^{-1}(4) = ?$

ÇÖZÜM

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$f(3) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3$

Cevap: 3