İkinci Dereceden Denklemler

1. İkinci Dereceden Denklem ve Kök

$ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Bu denklemi sağlayan x değerlerine denklemin **kökleri**, köklerin kümesine **çözüm kümesi** denir. Bir sayı kök ise denklemde yerine yazıldığında eşitliği sağlar.

ÖRNEK

$(a-2)x^{b-1} + 3x - 5 = 0$ ikinci dereceden bir denklem ise b = ? a için koşul?

ÇÖZÜM

$b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$

x^2'nin katsayısı 0 olamaz $\Rightarrow a \neq 2$

Cevap: b = 3 , a ≠ 2

ÖRNEK

$x^2 - 3x + m - 4 = 0$ denkleminin bir kökü 2 ise m = ?

ÇÖZÜM

$4 - 6 + m - 4 = 0$

$m - 6 = 0$

Cevap: 6

2. Çarpanlara Ayırarak Çözüm

$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ veya $B = 0$

Denklemin sol tarafı çarpanlarına ayrılır (ortak çarpan, iki kare farkı, tam kare, çapraz çarpım), her çarpan sıfıra eşitlenir.

$a + b + c = 0 \Rightarrow$ kökler 1 ve $\frac{c}{a}$

$a - b + c = 0 \Rightarrow$ kökler -1 ve $-\frac{c}{a}$

ÖRNEK

$5x^2 - 80 = 0$ ve $3x^2 + 5x - 2 = 0$ denklemlerini çözünüz.

ÇÖZÜM

$5(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow \pm 4$

$(3x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$, -2

Cevap: {−4, 4} ; {−2, ⅓}

ÖRNEK

$7x^2 - 4x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$a + b + c = 7 - 4 - 3 = 0$

Kökler 1 ve $\frac{c}{a} = \frac{-3}{7}$

Cevap: {1, −3/7}

3. Değişken Değiştirme

Denklemde aynı ifade tekrar ediyorsa ($x^2 - 3x$, 2^x, $\sqrt{x}$ gibi) bu ifadeye **t** denir; t'ye göre ikinci dereceden denklem çözülür, sonra geri dönülür. t'nin alabileceği değerlere dikkat edilir ($2^x = t$ ise $t > 0$).

ÖRNEK

$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$x^2 - 3x = t \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = (t - 4)(t + 2) = 0$

$x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x = 4 , x = -1$

$x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x = 1 , x = 2$

Cevap: {−1, 1, 2, 4}

ÖRNEK

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$2^x = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) = 0$

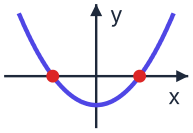
$2^x = 1 \Rightarrow x = 0 ; 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Cevap: {0, 2}

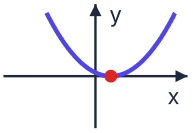
4. Diskriminant (Δ) ile Kök Bulma

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

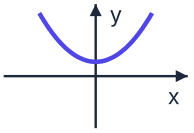
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



$\Delta > 0$: iki farklı reel kök



$\Delta = 0$: çakışık (eşit) iki kök



$\Delta < 0$: reel kök yok

Grafikler $y = ax^2 + bx + c$ parabolleridir; reel kökler parabolün x eksenini kestiği noktalardır. $\Delta = 0$ iken kök $x = -b / 2a$'dır. $\Delta < 0$ iken kökler karmaşık sayıdır.

ÖRNEK

$x^2 - 4x - 1 = 0$ denkleminin kökleri?

ÇÖZÜM

$\Delta = 16 + 4 = 20 , \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

Cevap: 2 ± √5

ÖRNEK

$(m - 1)x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin eşit iki kökü varsa m = ?

ÇÖZÜM

$\Delta = 16 - 4(m - 1) = 0$

$m - 1 = 4$

Cevap: 5

ÖRNEK

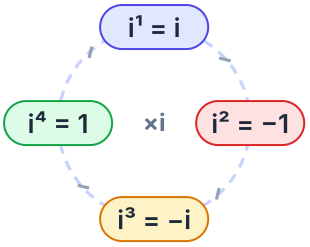
$x^2 - 6x + m = 0$ denkleminin farklı iki reel kökü varsa m'nin alabileceği en büyük tam sayı?

ÇÖZÜM

$\Delta = 36 - 4m > 0 \Rightarrow m < 9$

Cevap: 8

5. Karmaşık Sayılar



$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

- i'nin kuvvetleri **4'te bir tekrar eder**: i^n için n'nin 4'e bölümünden kalana bakılır.
- a > 0 için $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$. Dikkat: $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2i \cdot 3i = -6$ (6 değil).

$z = a + bi : Re(z) = a , Im(z) = b$

- $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$. • $Re(z) = 0$ ise z **saf sanal**.

ÖRNEK

$i^{2027} + i^{2026} = ?$

ÇÖZÜM

$2027 = 4 \cdot 506 + 3 \Rightarrow i^3 = -i$

2026 kalan 2 $\Rightarrow i^2 = -1$

Cevap: −1 − i

ÖRNEK

$z = (m - 2) + (m + 3)i$ saf sanal sayı ise $z = ?$

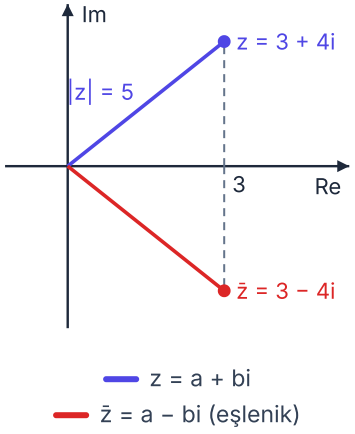
ÇÖZÜM

$Re(z) = m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$z = 5i$

Cevap: 5i

6. Eşlenik ve Karmaşık Sayılarda İşlemler



$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

- Toplama/çıkarma: reel kısımlar ve sanal kısımlar ayrı ayrı toplanır.
- Çarpma: parantezler açılır, $i^2 = -1$ yazılır.
- **Bölme:** pay ve payda **paydanın eşleniğiyle** çarpılır.

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Karmaşık düzlemde z ile z̄ reel eksene göre simetriktir.

ÖRNEK

$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - i$ ise $z_1 \cdot z_2$ ve $\frac{z_1}{z_2} = ?$

ÇÖZÜM

$6 - 3i + 8i - 4i^2 = 10 + 5i$

$$\frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + 11i}{5}$$

Cevap: 10 + 5i ; (2 + 11i)/5

ÖRNEK

$(1 + i)^{10} = ?$

ÇÖZÜM

$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

$(2i)^5 = 32 \cdot i^5 = 32i$

Cevap: 32i

7. Karmaşık Köklü Denklemler

$$\Delta < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Reel kökü olmayan denklemin kökleri karmaşık sayılardır ve **birbirinin eşleniğidir**. Reel katsayılı bir denklemin bir kökü a + bi ise diğer kökü a − bi'dir.

ÖRNEK

$x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow \sqrt{-16} = 4i$

$x = \frac{2 \pm 4i}{2}$

Cevap: {1 − 2i, 1 + 2i}

ÖRNEK

$x^2 + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$

Cevap: {−3i, 3i}

8. Kökler ile Katsayılar Arasındaki İlişki

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

Kökleri tek tek bulmadan, köklerin simetrik ifadeleri (toplam, çarpım, kareler toplamı...) bu formüllerle hesaplanır.

ÖRNEK

$x^2 - 5x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ise $x_1^2 + x_2^2$ ve $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = ?$

ÇÖZÜM

$x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 3$

$25 - 6 = 19$; $\frac{5}{3}$

Cevap: 19 ; 5/3

ÖRNEK

$x^2 - (2m - 1)x + m + 2 = 0$ denkleminin kökler toplamı 5 ise kökler çarpımı?

ÇÖZÜM

$2m - 1 = 5 \Rightarrow m = 3$

$x_1 \cdot x_2 = m + 2$

Cevap: 5

9. Köklerle İlgili Özel Durumlar

Durum	Koşul
Kökler simetrik ($x_1 = -x_2$)	$b = 0$ ve $\frac{c}{a} < 0$
Kökler ters işaretli	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$
Kökler birbirinin çarpmaya göre tersi	$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow a = c$
Bir kök 0	$c = 0$
Bir kök diğerinin k katı	$x_2 = k \cdot x_1$ yazılıp toplam / çarpım kullanılır

ÖRNEK

$x^2 + (m - 3)x - 4 = 0$ denkleminin kökleri simetrik ise m = ?

ÇÖZÜM

$b = m - 3 = 0$; $\frac{c}{a} = -4 < 0$ ✓

Cevap: 3

ÖRNEK

$x^2 - 6x + m = 0$ denkleminin bir kökü diğerinin 2 katı ise m = ?

ÇÖZÜM

$x_1 + 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 4$

$m = x_1 \cdot x_2$

Cevap: 8

10. Kökleri Verilen Denklemi Yazma

$x^2 - Tx + Ç = 0$ $(T = x_1 + x_2$, $Ç = x_1 \cdot x_2)$

Kökleri bilinen (baş katsayısı 1 olan) denklem $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ biçimindedir; açılınca kökler toplamı ve çarpımı görünür.

ÖRNEK

Kökleri 3 ve −5 olan ikinci dereceden denklem?

ÇÖZÜM

$T = -2$, $Ç = -15$

Cevap: $x^2 + 2x - 15 = 0$

ÖRNEK

Kökleri $2 + \sqrt{3}$ ve $2 - \sqrt{3}$ olan denklem?

ÇÖZÜM

$T = 4$, $Ç = 4 - 3 = 1$

Cevap: $x^2 - 4x + 1 = 0$

ÖRNEK

Reel katsayılı, bir kökü $1 - 2i$ olan ikinci dereceden denklem?

ÇÖZÜM

Diğer kök eşlenik: $1 + 2i$

$T = 2$, $Ç = 1 + 4 = 5$

Cevap: $x^2 - 2x + 5 = 0$

ÖRNEK

$x^2 - 3x - 5 = 0$ kökleri x_1, x_2. Kökleri $x_1 + 2$ ve $x_2 + 2$ olan denklem?

ÇÖZÜM

$T = (x_1 + x_2) + 4 = 7$

$Ç = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = -5 + 6 + 4 = 5$

Cevap: $x^2 - 7x + 5 = 0$