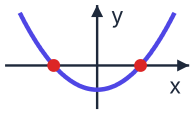
İkinci Dereceden Eşitsizlikler

1. İkinci Dereceden Eşitsizlik ve İşaret Tablosu

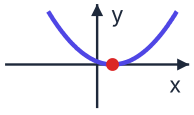
$ax^2 + bx + c > 0$, < 0 , ≥ 0 , ≤ 0 $(a \neq 0)$

Çözüm için önce $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri bulunur, sonra ifadenin **işaret tablosu** yapılır. İşaret, katsayı a'ya ve $\Delta = b^2 - 4ac$'ye göre belirlenir:



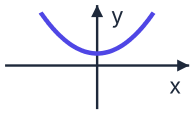
$\Delta > 0$: iki farklı kök ($x_1 < x_2$) → kökler arası a'nın tersi, dışı a ile aynı

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı	0	a'nın tersi	0	a ile aynı



$\Delta = 0$: çift katlı kök → kökte 0, her yerde a ile aynı (işaret değişmez)

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı	0	a ile aynı



$\Delta < 0$: reel kök yok → her zaman a ile aynı işaret

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı (her x için)	

Grafikler $a > 0$ için çizildi: parabolün x ekseninin **üstünde** kaldığı yerler (+), **altında** kaldığı yerler (−) işaretlidir.

2. Temel Eşitsizlik Çözümü

Adımlar: **1)** Her şey bir tarafa alınır, diğer taraf 0 olur. **2)** Kökler bulunur, sayı doğrusuna sıralanır. **3)** En sağdaki aralığa a'nın işareti yazılır. **4)** İstenen işaretli aralıklar seçilir; ≥ , ≤ ise kökler de dahil edilir.

ÖRNEK

$x^2 - x - 6 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$, $x = 3$; $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	○	−	○	+

Kökler arası negatif, eşitlik yok:

Cevap: $(-2, 3)$

● çözüme dahil ○ dahil değil ▭ eşitsizliği sağlayan aralık

ÖRNEK

$-x^2 + 2x + 8 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2$, $x = 4$; $a = -1 < 0$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 8$	−	●	+	●	−

Dışarısı negatif, kökler dahil:

Cevap: $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$

ÖRNEK

$x^2 - 6x + 9 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$(x - 3)^2 > 0$; $\Delta = 0$, $x = 3$ çift kat

$x = 3$ dışında her yerde pozitif

Cevap: $\mathbb{R} - \{3\}$

ÖRNEK

$x^2 + 2x + 5 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, $a > 0$

İfade her x için pozitif, hiç negatif olmaz

Cevap: $\varnothing$

3. Çarpım ve Bölüm Biçimindeki Eşitsizlikler

- Pay ve paydadaki tüm çarpanların kökleri **birlikte** tabloya yazılır.
- En sağdaki aralığın işareti: en büyük dereceli terimlerin katsayılarının çarpımı/bölümü.
- **Tek katlı** kökte işaret değişir, **çift katlı** kökte değişmez.
- **Paydanın kökleri** çözüme hiçbir zaman alınmaz. $x^2 + 3$ gibi her zaman pozitif çarpanlar işareti etkilemez.

ÖRNEK

$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x-4} \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

Kökler: $x = 1$ (tek), $x = -2$ (çift), $x = 4$ (payda, dahil değil). En sağ: $\frac{x \cdot x^2}{x} \Rightarrow +$

x	$-\infty$		-2 (çift)		1		4	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$		$+$
$(x+2)^2$	$+$		0	$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		0	$+$
$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x-4}$	$+$		●	$+$	●	$-$	○	$+$

● çözüme dahil ○ dahil değil eşitsizliği sağlayan aralık

Negatif aralık $(1, 4)$; eşitlik için $x = 1$ ve $x = -2$ dahil, $x = 4$ tanımsız.

Cevap: $\{-2\} \cup [1, 4)$

ÖRNEK

$\frac{(2-x)(x^2+3)}{x^2-9} \ge 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$x^2 + 3 > 0$ her zaman (kökü yok). $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ paydada.

Kökler: 2 (pay), -3 ve 3 (payda). En sağ: $\frac{(-x) \cdot x^2}{x^2} \Rightarrow -$

x	$-\infty$		-3		2		3	$+\infty$
$2-x$	$+$		$+$		0	$-$		$-$
x^2+3	$+$		$+$		$+$		$+$	$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+$
$\frac{(2-x)(x^2+3)}{x^2-9}$	$+$	○	$-$		●	$+$	○	$-$

Pozitif aralıklar seçilir, $x = 2$ dahil, ± 3 dahil değil.

Cevap: $(-\infty, -3) \cup [2, 3)$

4. Kesirli Eşitsizlikler

Paydanın işareti bilinmediği için **içler dışlar çarpımı yapılmaz** ve iki taraf paydayla çarpılmaz. Tüm terimler bir tarafa toplanıp tek kesir yapılır, sonra tablo kurulur.

ÖRNEK

$\frac{3}{x} < x - 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$\frac{3}{x} - x + 2 < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2x + 3}{x} < 0$

(-1) ile çarpılınca yön değişir: $\frac{x^2 - 2x - 3}{x} > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{x} > 0$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$x-3$		−		−		−	0	+	
$x+1$		−	0	+		+		+	
x		−		−	0	+		+	
$\frac{(x-3)(x+1)}{x}$		−	○	+	○	−	○	+	

Kontrol: $x = 4 \Rightarrow \frac{3}{4} < 2$ ✓ ; $x = 1 \Rightarrow 3 < -1$ ×

Cevap: $(-1, 0) \cup (3, \infty)$

5. Eşitsizlik Sistemleri

Birden fazla eşitsizlik birlikte verilirse her biri ayrı çözülür; çözüm kümesi bu kümelerin **kesişimi**dir. Kesişim en kolay sayı doğrusunda görülür.

ÖRNEK

$x^2 - 5x + 4 < 0$ ve $x^2 - 4 \geq 0$ sistemini sağlayan tam sayıları bulunuz.

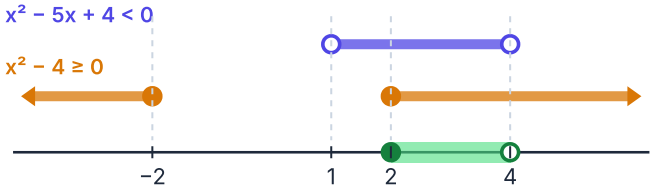
ÇÖZÜM

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		+	○	−	○	+	

$Ç_1 = (1, 4)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		+	●	−	●	+	

$Ç_2 = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = [2, 4)$

Tam sayılar: 2 ve 3

$x = 2$ ikinci eşitsizlikte dahil ($\geq$) ve birinci eşitsizliği sağlıyor ($4 - 10 + 4 = -2 < 0$); $x = 4$ birincide dahil değil.

Cevap: 2 ve 3

6. Köklerin İşaretlerinin İncelenmesi

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

Kökler	Δ	$x_1 \cdot x_2 = c/a$	$x_1 + x_2 = -b/a$
ters işaretli	(kendiliğinden > 0)	**< 0**	—
aynı işaretli, farklı	**> 0**	**> 0**	—
iki pozitif kök	**> 0**	**> 0**	**> 0**
iki negatif kök	**> 0**	**> 0**	**< 0**

Ters işaretli köklerde negatif kökün mutlak değeri büyükse $x_1 + x_2 < 0$, pozitif kökün mutlak değeri büyükse $x_1 + x_2 > 0$ olur.

ÖRNEK

$(m - 2)x^2 - 4x + m + 1 = 0$ denkleminin ters işaretli iki kökü varsa m'nin değer aralığı?

ÇÖZÜM

$x_1 \cdot x_2 = \frac{m + 1}{m - 2} < 0 \ (m \neq 2)$

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$m + 1$	−		0	+		+	
$m - 2$	−			−	0	+	
$\frac{m + 1}{m - 2}$	+		○	−	○	+	

Cevap: (−1, 2)

ÖRNEK

$x^2 - (m - 1)x + m + 2 = 0$ denkleminin pozitif iki farklı kökü varsa m'nin değer aralığı?

ÇÖZÜM

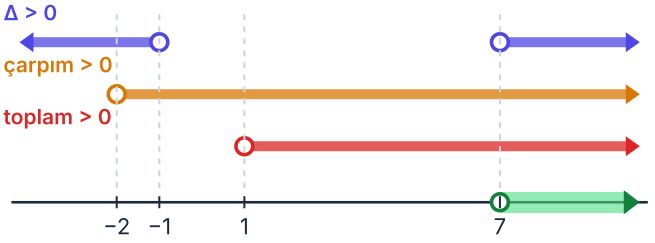
$\Delta = (m - 1)^2 - 4(m + 2) = m^2 - 6m - 7 > 0$

m	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$(m - 7)(m + 1)$	+		○	−	○	+	

$\Delta > 0 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$

$x_1 \cdot x_2 = m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$

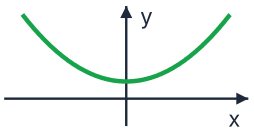
$x_1 + x_2 = m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$



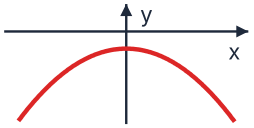
Üç koşulun kesişimi: $m > 7$

Cevap: (7, ∞)

7. Her x İçin Sağlanan Eşitsizlikler



$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a > 0$ ve $\Delta < 0$



$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow a < 0$ ve $\Delta < 0$

≥ 0 için $a > 0$ ve $\Delta \leq 0$; ≤ 0 için $a < 0$ ve $\Delta \leq 0$ yeterlidir (parabol x eksenine teğet olabilir). a parametre içeriyorsa $a = 0$ durumu ayrıca denetlenir.

ÖRNEK

$x^2 - 2mx + m + 6 > 0$ eşitsizliği her x için sağlanıyorsa m'nin alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

ÇÖZÜM

$a = 1 > 0$ ✓ ; $\Delta = 4m^2 - 4(m + 6) < 0$

$m^2 - m - 6 < 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 2) < 0$

m	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$(m - 3)(m + 2)$	+	○	−	○	+

$m \in (-2, 3) \Rightarrow -1, 0, 1, 2$

Cevap: 4

ÖRNEK

$mx^2 + 4x + m - 3 < 0$ her x için sağlanıyorsa m'nin değer aralığı?

ÇÖZÜM

$m < 0$ ve $\Delta = 16 - 4m(m - 3) < 0$

$m^2 - 3m - 4 > 0$

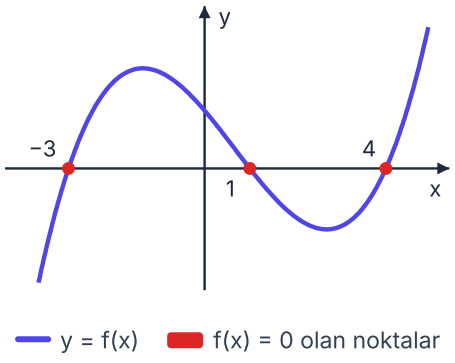
m	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$m^2 - 3m - 4$	+	○	−	○	+

$(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ ile $m < 0$ kesişimi

Cevap: $(-\infty, -1)$

8. Grafiği Verilen Fonksiyonla Eşitsizlik

f(x)'in işareti grafikten okunur: grafik x ekseninin **üstündeyse f(x) > 0**, **altındaysa f(x) < 0**, x eksenini kestiği noktalarda f(x) = 0. Bu işaretler tabloya satır olarak yazılır.



ÖRNEK

Grafiği verilen f için $x \cdot f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

f: $(-\infty, -3)$ −, $(-3, 1)$ +, $(1, 4)$ −, $(4, \infty)$ +

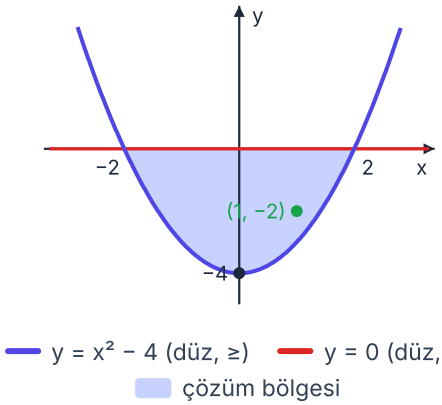
x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
x	−		−	0	+		+		+
f(x)	−	0	+		+	0	−	0	+
$x \cdot f(x)$	+	○	−	○	+	○	−	○	+

Negatif aralıklar seçilir, eşitlik yok.

Cevap: $(-3, 0) \cup (1, 4)$

9. Eşitsizliklerin Analitik Düzlemde Gösterimi

• $y > f(x)$: eğrinin **üst** tarafı , $y < f(x)$: eğrinin **alt** tarafı.
• $\geq$, $\leq$ ise sınır bölgeye dahildir (**düz** çizgi); $>$, $<$ ise dahil değildir (**kesikli** çizgi).



ÖRNEK

$y \geq x^2 - 4$ ve $y \leq 0$ sisteminin bölgesi nedir? $(1, -2)$ bu bölgede midir?

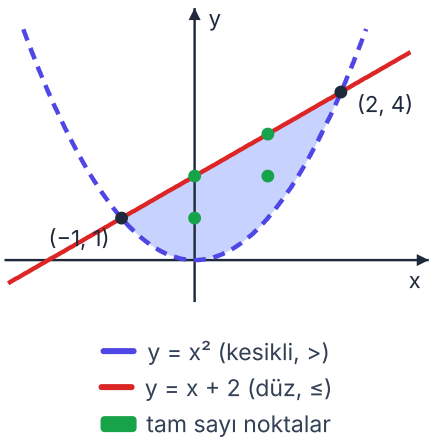
ÇÖZÜM

Parabolün üstü ve x ekseninin altı; sınırlar dahil

$-2 \geq 1 - 4 = -3$ ✓ ve $-2 \leq 0$ ✓

Cevap: Evet, bölgededir

• Sistemde bölgelerin **ortak** kısmı taranır.
• Bir nokta, koordinatları eşitsizliklere yazılarak denetlenir.



ÖRNEK

$y > x^2$ ve $y \leq x + 2$ bölgesinde koordinatları tam sayı olan kaç nokta vardır?

ÇÖZÜM

$x^2 < x + 2 \Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$

$x = 0$: $0 < y \leq 2 \Rightarrow y = 1, 2$

$x = 1$: $1 < y \leq 3 \Rightarrow y = 2, 3$

Cevap: 4