İntegral

1. Diferansiyel

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx$$

x'teki çok küçük değişim **dx**, buna karşılık f(x)'teki değişim **dy**'dir. Grafikte dy, A noktasındaki teğet boyunca oluşan değişimdir.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 2x$ fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 2$

$d(f(x)) = (3x^2 - 2)\,dx$

Cevap: $(3x^2 - 2)\,dx$

2. Belirsiz İntegral

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

İntegral, türevin tersidir. **c** integral sabitidir.

$(\int f(x)\,dx)' = f(x)$

$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

ÖRNEK

$\int f(x)\,dx = x^3 + 2x^2 + c$ ise $f(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = (x^3 + 2x^2)' = 3x^2 + 4x$

$f(2) = 12 + 8 = 20$

Cevap: 20

3. Temel İntegral Kuralları

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

$\int k\,dx = kx + c$

$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

$\int e^x\,dx = e^x + c \cdot \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Örn: $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

ÖRNEK

$\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM

$6 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c$

$= 2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

Cevap: $2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

4. Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + c$

$\int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\cot x + c$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c\,,\ \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

ÖRNEK

$\int (3\cos x - 2\sin x)\,dx = ?$

ÇÖZÜM

$3\sin x - 2(-\cos x) + c$

$= 3\sin x + 2\cos x + c$

Cevap: 3 sin x + 2 cos x + c

ÖRNEK

$\int \cos 4x\,dx = ?$

ÇÖZÜM

$$= \frac{\sin 4x}{4} + c$$

Cevap: sin 4x / 4 + c

5. İntegralle Fonksiyon Bulma

f′(x) verilip f(x) isteniyorsa integral alınır; **c** sabiti verilen bir noktadaki değerden bulunur.

ÖRNEK

f′(x) = 6x − 2 ve f(1) = 5 ise f(2) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = 3x^2 - 2x + c$

$f(1) = 3 - 2 + c = 5 \Rightarrow c = 4$

$f(2) = 12 - 4 + 4 = 12$

Cevap: 12

6. Değişken Değiştirme

İntegrandda bir ifade ve **türevi** (ya da türevinin katı) birlikte varsa o ifadeye **u** denir: u = g(x), du = g′(x) dx.

ÖRNEK

$\int 2x(x^2 + 1)^4\,dx = ?$

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + c$$

Cevap: $(x^2 + 1)^5/5 + c$

ÖRNEK

$\int \cos x \cdot \sin^3 x\,dx = ?$

ÇÖZÜM

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

Cevap: $\sin^4 x / 4 + c$

7. Belirli İntegral

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Belirli integralin sonucu bir **sayı**dır; c sabiti yazılmaz.

ÖRNEK

$\int_1^3 (2x + 1)\,dx$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$= (x^2 + x)\,\Big]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1)$

$= 12 - 2 = 10$

Cevap: 10

8. Belirli İntegralin Özellikleri

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx = \int_a^c f\,dx$$

ÖRNEK

$\int_0^2 f(x)\,dx = 5$ ve $\int_2^5 f(x)\,dx = 3$ ise

$\int_0^5 (2f(x) + 1)\,dx$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_0^5 f(x)\,dx = 8$

$2 \cdot 8 + (x)\,\Big]_0^5 = 16 + 5 = 21$

Cevap: 21

9. Belirli İntegralde Değişken Değiştirme

u = g(x) dönüşümü yapılınca **sınırlar da değişir**: x = a ⇒ u = g(a), x = b ⇒ u = g(b).

ÖRNEK

$\int_0^1 2x(x^2 + 1)^3\,dx$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$; x: 0 → 1 iken u: 1 → 2

$$\int_1^2 u^3\,du = \frac{u^4}{4}\,\Big]_1^2 = \frac{16 - 1}{4} = \frac{15}{4}$$

Cevap: 15/4

10. İntegralin Türevi

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Alt sınır sabitse türevde etkisi yoktur.

ÖRNEK

$F(x) = \int_1^{x^2} (t + 3)\,dt$ ise $F'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$F'(x) = (x^2 + 3) \cdot 2x$

$F'(2) = 7 \cdot 4 = 28$

Cevap: 28

11. Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonun İntegrali

İntegral, kritik noktalardan (kural değişen yer ya da mutlak değerin içini sıfır yapan nokta) **parçalara bölünür**.

ÖRNEK

$\int_0^4 |x-1|\,dx$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$x < 1: 1 - x$, $x \geq 1: x - 1$

$$\int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^4 (x-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$$

Cevap: 5

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, & x < 2 \\ x^2\,, & x \geq 2 \end{cases}$$

$\int_0^3 f(x)\,dx = ?$

ÇÖZÜM

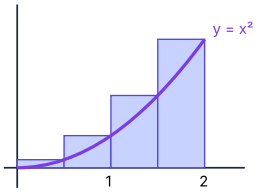
$$\int_0^2 2x\,dx = 4$$

$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}$$

Toplam: $4 + \frac{19}{3} = \frac{31}{3}$

Cevap: 31/3

12. Riemann Toplamları



[a, b] aralığı n eşit parçaya bölünür: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Her parçada bir dikdörtgen çizilir; alanlar toplamı, eğri altındaki alana yaklaşır.

Alt toplam: her aralıktaki en küçük değer · **Üst toplam:** en büyük değer. n → ∞ iken ikisi de belirli integrale eşit olur.

ÖRNEK

$f(x) = x^2$ için [0, 2] aralığını 4 eşit parçaya bölerek üst toplamı bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta x = 0{,}5$; f artan, sağ uçlar alınır: $0{,}5 \cdot 1 \cdot 1{,}5 \cdot 2$

$0{,}5 \cdot (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 0{,}5 \cdot 7{,}5 = 3{,}75$

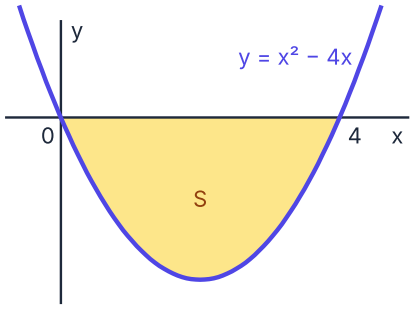
Gerçek alan $\frac{8}{3} \approx 2{,}67$; parça sayısı arttıkça yaklaşır.

Cevap: 3,75

13. Belirli İntegralle Alan

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Eğri x ekseninin **altındaysa** integral negatif çıkar; alan için mutlak değeri alınır.



ÖRNEK

$y = x^2 - 4x$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan alan kaç birimkaredir?

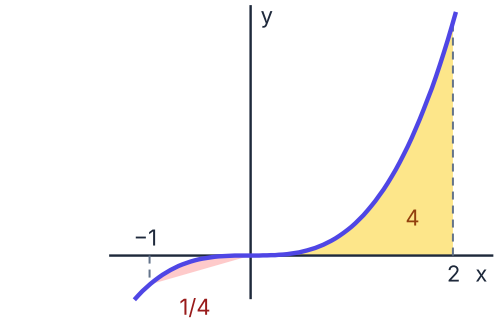
ÇÖZÜM

Kökler: $x = 0$, $x = 4$ (bölge eksenin altında)

$$\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big]_0^4$$

$$= \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3} \Rightarrow S = \frac{32}{3}$$

Cevap: 32/3



ÖRNEK

$y = x^3$ eğrisi, x ekseni, $x = -1$ ve $x = 2$ doğruları arasındaki alan?

ÇÖZÜM

$[-1, 0]$: eksenin altı $\rightarrow \int_{-1}^{0} -x^3\,dx = \frac{1}{4}$

$[0, 2]$: $\int_0^2 x^3\,dx = 4 \Rightarrow S = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

Cevap: 17/4

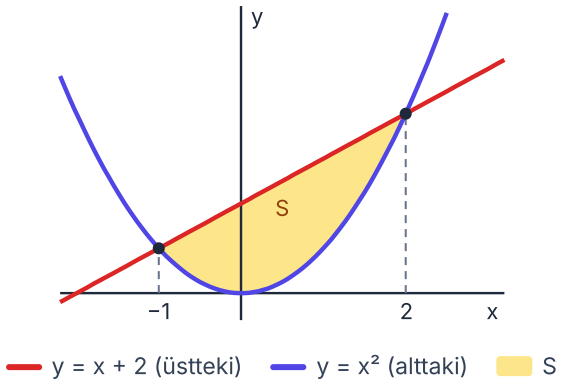
14. İki Eğri Arasındaki Alan

x'e göre: $S = \int_a^b [\text{üstteki} - \text{alttaki}]\, dx$

y'ye göre: $S = \int_c^d [\text{sağdaki} - \text{soldaki}]\, dy$

x'e göre: bölge **dikey** şeritlere bölünür; her şeritte üstteki eğriden alttaki eğri çıkarılır. Sınırlar, eğrilerin kesiştiği x değerleridir.

y'ye göre: bölge **yatay** şeritlere bölünür; eğriler x = g(y) biçiminde yazılır ve her şeritte **sağda kalan** eğriden **solda kalan** eğri çıkarılır.



ÖRNEK

$y = x^2$ ve $y = x + 2$ arasındaki alan?

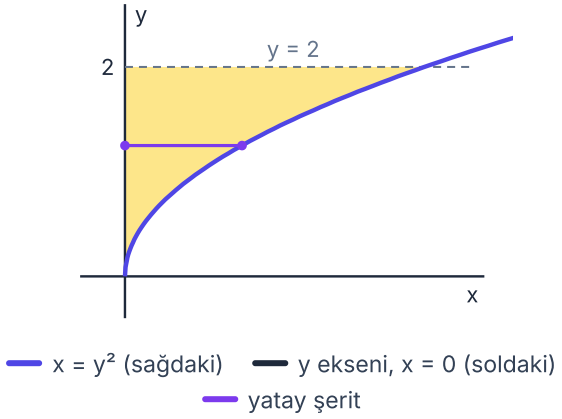
ÇÖZÜM

$x^2 = x + 2 \Rightarrow x = -1, x = 2$; üstte $y = x + 2$

$$\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$

Cevap: 9/2



ÖRNEK

$x = y^2$ eğrisi, y ekseni ve $y = 2$ doğrusu arasındaki alan?

ÇÖZÜM

Yatay şerit: soldaki y ekseni ($x = 0$), sağdaki $x = y^2$

$$S = \int_0^2 y^2\, dy = \frac{y^3}{3} \Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Cevap: 8/3