Köklü İfadeler

1. Kök Kavramı ve Tanım Koşulu

$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2)$

n **çift** ise: $\sqrt[n]{a}$ için $a \geq 0$

Negatif sayının çift dereceden kökü gerçel sayı değildir. Sonuç da negatif olamaz: $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

n **tek** ise: her $a \in \mathbb{R}$ için tanımlı

Tek dereceden kök, sayının işaretini korur: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

ÖRNEK

$\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{7-x}$ ifadesini gerçel sayı yapan kaç tam sayı vardır?

ÇÖZÜM

$x - 3 \geq 0$ ve $7 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7$

3, 4, 5, 6, 7

Cevap: 5

ÖRNEK

$\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{16} - \sqrt{49} = ?$

ÇÖZÜM

$-3 + 2 - 7$

Cevap: −8

2. Bir Sayının Kuvvetinin Kökü

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ (n çift)

$\sqrt[n]{a^n} = a$ (n tek)

Çift dereceden kök negatif sonuç vermez, bu yüzden mutlak değer kullanılır: $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$. İçerideki ifadenin işareti verilen koşuldan bulunur.

ÖRNEK

$x < -1$ olmak üzere $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^3} = ?$

ÇÖZÜM

$x + 1 < 0 \Rightarrow |x + 1| = -x - 1$

Tek dereceden kök $\Rightarrow x - 3$

$-x - 1 + x - 3$

Cevap: −4

3. Kök Dışına Çıkarma ve Rasyonel Üs

$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b}$ $(a \geq 0)$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{mk}}$ (genişletme)

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Kök içindeki sayı, kök derecesine uygun **tam kuvvetlere** ayrılır; tam kuvvet olan çarpan dışarı çıkar. Tersine, dışarıdaki çarpan kök derecesi kadar kuvvetiyle içeri girer: $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$.

ÖRNEK

$\sqrt{72}$ ve $\sqrt[3]{54}$ ifadelerini en sade biçimde yazınız.

ÇÖZÜM

$\sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

Cevap: $6\sqrt{2}$; $3\sqrt[3]{2}$

ÖRNEK

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ ve $8^{2/3}$ değerleri?

ÇÖZÜM

$\sqrt[6]{64} = 2$

$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2$

Cevap: 2 ; 4

4. Köklü İfadelerde Dört İşlem

$a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$

• Toplama/çıkarma yalnızca **kök derecesi ve kök içi aynı** olan terimler arasında yapılır; önce kökler sadeleştirilir.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ (b \neq 0)$

• Kök dereceleri farklıysa önce **EKOK**'ta eşitlenir: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{108}$.

Dikkat: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Örn: $\sqrt{9+16} = 5$ ama $3 + 4 = 7$.

ÖRNEK

$\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} = ?$

ÇÖZÜM

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

Cevap: $6\sqrt{2}$

ÖRNEK

$\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{8}} = ?$

ÇÖZÜM

$\sqrt{\frac{12 \cdot 6}{8}} = \sqrt{9}$

Cevap: 3

5. Köklü Sayıları Sıralama

• Kök dereceleri aynıysa kök içi büyük olan büyüktür.
• Dereceler farklıysa **EKOK**'ta eşitlenir, sonra kök içleri karşılaştırılır.
• $a\sqrt{b}$ biçimindeki sayılar kök içine alınarak karşılaştırılır.

ÖRNEK

$a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{5}$, $c = \sqrt[6]{24}$ sıralaması?

ÇÖZÜM

EKOK = 6: $a = \sqrt[6]{27}$, $b = \sqrt[6]{25}$, $c = \sqrt[6]{24}$

Cevap: c < b < a

6. Paydayı Kökten Kurtarma

$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ $\qquad$ $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$

Paydada $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ varsa pay ve payda **eşleniği** ile çarpılır; paydada iki kare farkı oluşur ve kök kalkar. $\sqrt[n]{a}$ için payda ve pay $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ ile çarpılır.

ÖRNEK

$\frac{6}{\sqrt{3}}$ ve $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ ifadelerinin paydasını kökten kurtarınız.

ÇÖZÜM

$\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$\frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3}$

Cevap: $2\sqrt{3}$; $\sqrt{7} + \sqrt{3}$

ÖRNEK

$\frac{1}{\sqrt{5} + 2} = ?$

ÇÖZÜM

$\frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4}$

Cevap: $\sqrt{5} - 2$

7. İç İçe Kökler ve Gizli Tam Kare

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ $(x + y = a\ ,\ x \cdot y = b\ ,\ x > y)$

Gizli tam karede $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ ifadesi $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ biçimine getirilir. Kök önünde 2 yoksa içeri alınarak oluşturulur: $6\sqrt{2} = 2\sqrt{18}$.

ÖRNEK

$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = ?$

ÇÖZÜM

$x + y = 8\ ,\ xy = 15 \Rightarrow 5$ ve 3

Cevap: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

ÖRNEK

$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = ?$

ÇÖZÜM

$6\sqrt{2} = 2\sqrt{18}\ ;\ x + y = 11\ ,\ xy = 18 \Rightarrow 9$ ve 2

$\sqrt{9} - \sqrt{2}$

Cevap: $3 - \sqrt{2}$

ÖRNEK

$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}} = ?$

ÇÖZÜM

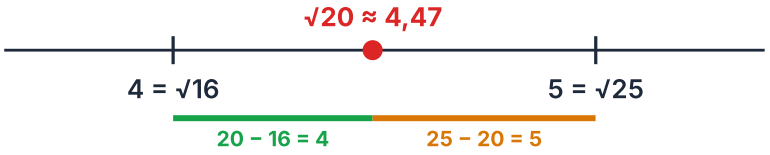
İfadeye x denir: $x = \sqrt{6 + x} \Rightarrow x^2 = 6 + x$

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3\ (x > 0)$

Cevap: 3

8. Kareköklü Sayıların Sayı Doğrusundaki Yeri

Kök içindeki sayının arasında kaldığı **ardışık iki tam kare** bulunur: $16 < 20 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{20} < 5$. Hangi tam kareye daha yakınsa kök o tam sayıya daha yakındır.



1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

ÖRNEK

$\sqrt{50} + \sqrt{10}$ toplamı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır?

ÇÖZÜM

$49 < 50 < 64 \Rightarrow \sqrt{50} \approx 7{,}1\ ;\ 9 < 10 < 16 \Rightarrow \sqrt{10} \approx 3{,}2$

Toplam $\approx 10{,}3$

Cevap: 10 ile 11

ÖRNEK

$6 < \sqrt{n} < 7$ eşitsizliğini sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

ÇÖZÜM

Kareleri alınır: $36 < n < 49$

$n = 37, 38, \ldots, 48$

Cevap: 12