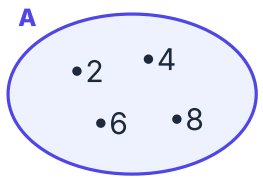
Kümeler

1. Küme Kavramı ve Gösterimi

Kesin olarak belirlenmiş nesneler topluluğuna **küme** denir. a ∈ A: "a, A'nın elemanıdır"; s(A): eleman sayısı.



Venn şeması

Liste: A = {2, 4, 6, 8}

Ortak özellik: A = {x | 0 < x < 10 , x çift sayı}

Liste yönteminde her eleman bir kez yazılır, sıra önemli değildir.

ÖRNEK

B = {x | x < 20 , x pozitif ve 3'ün katı} kümesini liste yöntemiyle yazınız, s(B)'yi bulunuz.

ÇÖZÜM

B = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

Cevap: s(B) = 6

2. Küme Çeşitleri, Eşit ve Denk Kümeler

• **Sonlu küme:** elemanları sayılarak bitirilebilir. • **Sonsuz küme:** bitirilemez (ℕ, ℤ, ℝ).

• **Boş küme:** elemanı yoktur: ø ya da { }. Dikkat: {ø} boş küme değildir, 1 elemanlıdır.

• **Evrensel küme (E):** üzerinde çalışılan bütün elemanları kapsayan küme.

• **Eşit kümeler (A = B):** elemanları aynı. • **Denk kümeler (A ≡ B):** eleman sayıları aynı.

ÖRNEK

K = {x, y, z} , L = {5, 6, 7} , M = {z, x, y} ve D = {ø} için hangileri eşit, hangileri denktir? s(D) = ?

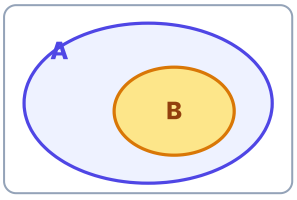
ÇÖZÜM

K = M (aynı elemanlar) ; K ≡ L ≡ M (3'er eleman)

D'nin tek elemanı ø ⇒ s(D) = 1

Cevap: K = M ; K ≡ L ; s(D) = 1

3. Alt Küme ve Öz Alt Küme



B ⊂ A

B'nin her elemanı A'nın da elemanıysa B, A'nın **alt kümesidir**: B ⊂ A.

• ø ⊂ A ve A ⊂ A (her küme kendisinin alt kümesidir).

• A ⊂ B ve B ⊂ C ⇒ A ⊂ C

• A ⊂ B ve B ⊂ A ⇒ A = B

Kümenin kendisi dışındaki alt kümelerine **öz alt küme** denir.

s(A) = n ⇒ alt küme sayısı 2^n

öz alt küme sayısı $2^n - 1$

r elemanlı alt küme sayısı: $\binom{n}{r}$

ÖRNEK

A = {a, b, c, d, e} kümesinin kaç alt kümesi, kaç öz alt kümesi, kaç 2 elemanlı alt kümesi vardır?

ÇÖZÜM

$2^5 = 32$; $32 - 1 = 31$; $\binom{5}{2} = 10$

Cevap: 32 ; 31 ; 10

ÖRNEK

Aynı A'nın a'yı içeren, b'yi içermeyen kaç alt kümesi vardır? En az 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

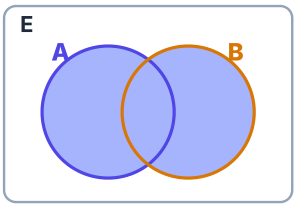
ÇÖZÜM

a sabit, b dışarıda, kalan 3 eleman: $2^3 = 8$

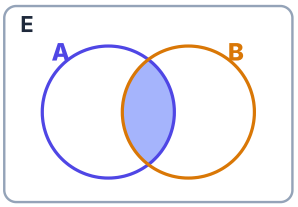
32 − 1 (boş) − 5 (tek elemanlı) = 26

Cevap: 8 ; 26

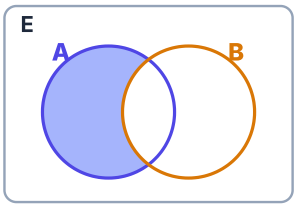
4. Kümelerde İşlemler



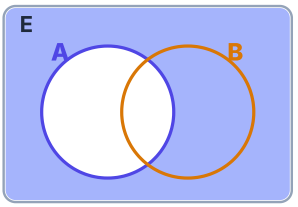
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



A'

- **Birleşim:** $A \cup B = \{x \mid x \in A$ **veya** $x \in B\}$
- **Kesişim:** $A \cap B = \{x \mid x \in A$ **ve** $x \in B\}$. $A \cap B = \varnothing$ ise A ile B **ayrık** kümelerdir.
- **Fark:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ ve $x \notin B\} = A \cap B'$ (yalnız A)
- **Tümleyen:** $A' = E \setminus A$; $(A')' = A$, $E' = \varnothing$, $\varnothing' = E$, $A \cup A' = E$, $A \cap A' = \varnothing$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Son iki eşitlik De Morgan kurallarıdır. Birleşim ve kesişimde değişme, birleşme ve dağılma özellikleri geçerlidir: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ için $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ ve $B \setminus A$?

ÇÖZÜM

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$

$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{6, 7\}$

Cevap: yukarıdaki gibi

ÖRNEK

$E = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ise $(A \cup B)'$ ve $A' \cap B$?

ÇÖZÜM

$A \cup B = \{1, \ldots, 6\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{7, 8, 9, 10\}$

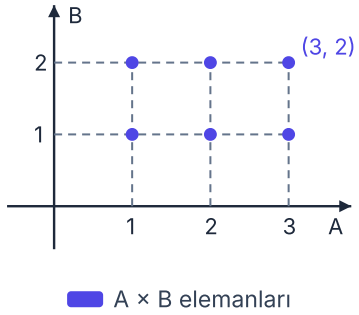
$A' \cap B$: B'de olup A'da olmayanlar

Cevap: {7, 8, 9, 10} ; {5, 6}

5. Sıralı İkili ve Kartezyen Çarpım

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A , y \in B\}$$



- (a, b) **sıralı ikilisinde** sıra önemlidir: $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$; genellikle $A \times B \neq B \times A$.
- $A \times B$ analitik düzlemde noktalarla gösterilir. Şekilde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ için $3 \cdot 2 = 6$ nokta var.

ÖRNEK

$(2x - 1, y + 3) = (5, 1)$ ise $x + y = ?$

ÇÖZÜM

$2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$; $y + 3 = 1 \Rightarrow y = -2$

Cevap: 1

ÖRNEK

$s(A) = 3$, $s(B) = 4$ ise $A \times B$ kaç elemanlıdır? $A \times B$'nin kaç alt kümesi vardır?

ÇÖZÜM

$s(A \times B) = 3 \cdot 4 = 12$

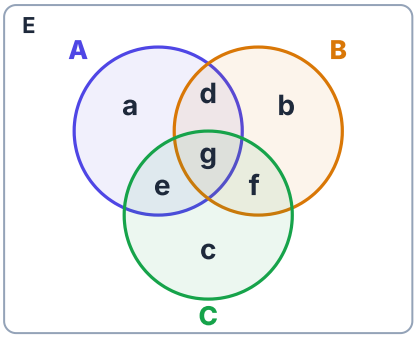
Alt küme sayısı 2^{12}

Cevap: 12 ; 4096

6. Birleşimin Eleman Sayısı

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$s(A \setminus B) = s(A) - s(A \cap B)$$



Bölgeler: a, b, c yalnız birinde; d, e, f ikisinde; g üçünde

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C)$$
$$- s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

Üç kümeli sorularda bölgelere bilinmeyen yazıp (a, b, ... g) denklem kurmak çoğu zaman daha kolaydır: s(A ∪ B ∪ C) = a + b + c + d + e + f + g.

ÖRNEK

$s(A) = 12$, $s(B) = 9$ ve $s(A \cup B) = 17$ ise $s(A \cap B)$ ve $s(A \setminus B)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

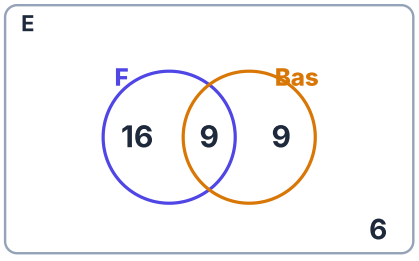
$17 = 12 + 9 - s(A \cap B) \Rightarrow s(A \cap B) = 4$

$s(A \setminus B) = 12 - 4$

Cevap: 4 ; 8

7. Küme Problemleri

Problemdeki gruplar kümelerle gösterilir, Venn şemasının her bölgesine o bölgedeki kişi sayısı yazılır. **"Yalnız"** ifadesi tek bir bölgeyi, **"en az biri"** birleşimi, **"hiçbiri"** dışarıdaki bölgeyi anlatır.



F: futbol, Bas: basketbol; sağ alttaki 6: hiçbiri

ÖRNEK

40 kişilik bir sınıfta 25 kişi futbol, 18 kişi basketbol oynuyor; 6 kişi ikisini de oynamıyor. İkisini birden oynayan kaç kişidir? Yalnız bir spor yapan kaç kişidir?

ÇÖZÜM

En az biri: $40 - 6 = 34 \Rightarrow 34 = 25 + 18 - x \Rightarrow x = 9$

Yalnız futbol $25 - 9 = 16$, yalnız basketbol $18 - 9 = 9$

Yalnız bir spor: $16 + 9 = 25$

Cevap: 9 ; 25