Limit ve Süreklilik

1. Sağdan ve Soldan Yaklaşma

$x \to a^-$: x, a'ya **soldan** (a'dan küçük değerlerle) yaklaşır. Örn: 1,9 · 1,99 · 1,999 → 2^-

$x \to a^+$: x, a'ya **sağdan** (a'dan büyük değerlerle) yaklaşır. Örn: 2,1 · 2,01 · 2,001 → 2^+

Limit, fonksiyonun x = a **noktasındaki değerini** değil, a'ya **yaklaşırken** nasıl davrandığını inceler.

İpucu: $x \to a^+$ iken $-x \to (-a)^-$ olur.

2. Limitin Var Olma Şartı

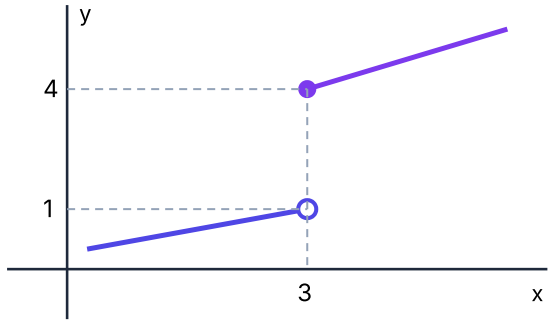
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R})$$

Sağdan ve soldan limitler **eşit değilse** limit **yoktur**.

f(a) tanımlı olmasa da limit var olabilir; f(a) tanımlı olsa da limit f(a)'ya eşit olmayabilir.

3. Grafikte Sağ ve Sol Limit



$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$ (boş daire: değer alınmaz)

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$

$f(3) = 4$ (dolu daire)

$1 \neq 4 \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x)$ **yoktur**

4. Parçalı Fonksiyonda Limit

Kritik noktada (fonksiyonun kural değiştirdiği yerde) **sağ** ve **sol** limit ayrı ayrı hesaplanır.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 , & x < 3 \\ x + 2 , & x \geq 3 \end{cases}$$

ise $\lim_{x \to 3} f(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Sol: $2 \cdot 3 - 1 = 5$ · Sağ: $3 + 2 = 5$

Eşit ⇒ limit 5'tir.

Cevap: 5

5. Parametreli Parçalı Fonksiyon

Limitin var olması isteniyorsa sağ limit = sol limit eşitliği kurulur.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 , & x < 2 \\ x^2 + 5 , & x \geq 2 \end{cases}$$

x = 2'de limit varsa a kaçtır?

ÇÖZÜM

Sol: $2a + 3$ · Sağ: $4 + 5 = 9$

$2a + 3 = 9 \Rightarrow a = 3$

Cevap: 3

6. Limitin Özellikleri

lim f(x) = L ve lim g(x) = M (x → a, L ve M reel sayı) ise:

$\lim [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

$\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot L$ (k sabit)

$\lim [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

$\lim [f(x)]^n = L^n$

$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (n çiftse $L \geq 0$)

Polinom ve paydası sıfır olmayan **rasyonel** fonksiyonlarda limit, x yerine a yazılarak bulunur.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x + 4}{x^2 + 1}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Payda x = 2'de sıfır değil, doğrudan yerine yazılır: $\frac{8 - 2 + 4}{4 + 1} = \frac{10}{5} = 2$

Cevap: 2

ÖRNEK

$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ ve $\lim_{x \to 1} g(x) = -2$ ise $\lim_{x \to 1} \frac{2f(x) + g(x)^2}{f(x) - g(x)}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{2 \cdot 3 + (-2)^2}{3 - (-2)} = \frac{10}{5} = 2$

Cevap: 2

7. Mutlak Değerli Limit

Mutlak değerin içini sıfır yapan noktada sağ ve sol limit **ayrı** incelenir.

ÖRNEK

$\lim_{x \to 4} \frac{|x - 4|}{x - 4}$ var mıdır?

ÇÖZÜM

$x \to 4^+$: $|x - 4| = x - 4 \Rightarrow 1$

$x \to 4^-$: $|x - 4| = -(x - 4) \Rightarrow -1$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ limit yoktur.

Cevap: Yoktur

8. Bileşke Fonksiyonda Limit

Önce iç fonksiyonun **hangi değere, hangi yönden** yaklaştığı bulunur; sonra dış fonksiyonun o yöndeki limitine bakılır.

ÖRNEK

$g(x) = 5 - x^2$, $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 5 \\ x + 7, & x \geq 5 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(g(x))$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$x \to 0$ iken $x^2 > 0$, yani $g(x) \to 5^-$

$f(5^-) = 3 \cdot 5 - 2 = 13$

Cevap: 13

9. 0/0 Belirsizliği

x = a yazınca $\frac{0}{0}$ çıkıyorsa, pay ve payda **(x – a)** çarpanını içerir. Bu ortak çarpan sadeleştirilir, sonra x yerine a yazılır. Yöntemler: **çarpanlara ayırma**, **eşlenikle çarpma**.

ÖRNEK · Çarpanlara Ayırma

$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-12}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+3)}$

$= \frac{4+4}{4+3} = \frac{8}{7}$

Cevap: 8/7

ÖRNEK · Eşlenik

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Pay ve paydayı $(\sqrt{x}+3)$ ile çarp:

$\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3} \to \frac{1}{6}$

Cevap: 1/6

ÖRNEK · Parametre

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+ax-15}{x-3} = b$ ise a + b kaçtır?

ÇÖZÜM

Payda 0 olduğundan limitin reel olması için pay da 0 olmalı: $9 + 3a - 15 = 0 \Rightarrow a = 2$

$x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5) \Rightarrow b = 3 + 5 = 8 \Rightarrow a + b = 10$

Cevap: 10

10. Trigonometrik Limitler (x radyan)

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Yalnızca x → 0 için geçerlidir. x → a için t = x – a dönüşümü yapılır.

ÖRNEK

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + \tan 2x}{4x}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{6}{4} + \frac{2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Cevap: 2

ÖRNEK

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$

$\frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \to 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Cevap: 8

11. x → a İçin Trigonometrik Limit

x, 0'dan farklı bir değere yaklaşıyorsa **t = x − a** dönüşümüyle limit t → 0'a taşınır.

ÖRNEK

$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$t = \pi - x \Rightarrow x \to \pi$ iken $t \to 0$ ve $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Cevap: 1

12. Süreklilik

f fonksiyonu x = a noktasında **süreklidir** ⇔ şu üç şart birlikte sağlanır:

① f(a) tanımlı

② $\lim_{x\to a} f(x)$ var

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Biri bile sağlanmazsa f, x = a'da **süreksizdir**. Grafikte süreklilik: kalemi kaldırmadan çizilebilmek.

Her zaman sürekli olanlar: polinomlar, sin x, cos x, a^x (a > 0). Rasyonel fonksiyonlar paydayı sıfır yapan noktalarda **süreksizdir**. Sürekli fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı ve (payda ≠ 0 iken) bölümü de süreklidir.

ÖRNEK

$f(x) = \begin{cases} x^2 + k\,, & x \le 3 \\ 4x - 1\,, & x > 3 \end{cases}$

f, ℝ'de sürekli ise k kaçtır?

ÇÖZÜM

Parçalar kendi aralığında sürekli; x = 3'e bakılır:

$9 + k = 4\cdot 3 - 1 = 11 \Rightarrow k = 2$

Cevap: 2

ÖRNEK

$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar?

ÇÖZÜM

$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ ve $x = 5$

Cevap: x = 1, x = 5

ÖRNEK

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}\,, & x \ne 2 \\ m\,, & x = 2 \end{cases}$ x = 2'de sürekli ise m kaçtır?

ÇÖZÜM

$\lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$ ve süreklilik için f(2) = 4 olmalı ⇒ m = 4

Cevap: 4