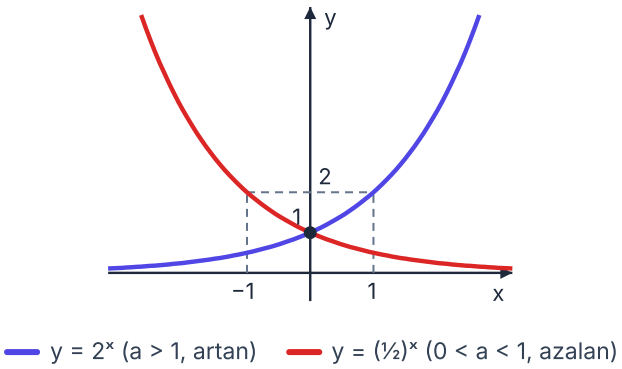
Logaritma

1. Üstel Fonksiyon



y = 2^x (a > 1, artan) y = $(½)^x$ (0 < a < 1, azalan)

$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

• Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $(0, \infty)$: grafik hep x ekseninin **üstündedir**.

• Her üstel fonksiyon **(0, 1)** noktasından geçer; x ekseni yatay asimptottur.

• a > 1 ise **artan**, 0 < a < 1 ise **azalan**dır. $y = a^x$ ile $y = (1/a)^x$, y eksenine göre simetriktir.

Özel taban: e ≈ 2,718 → $f(x) = e^x$

ÖRNEK

$f(x) = m \cdot 2^x + n$ fonksiyonunda $f(0) = 5$ ve $f(1) = 8$ ise $f(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(0) = m + n = 5$, $f(1) = 2m + n = 8 \Rightarrow m = 3$, $n = 2$

$f(2) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$

Cevap: 14

2. Logaritmanın Tanımı

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Koşullar: taban **a > 0, a ≠ 1**; logaritması alınan sayı **b > 0**.

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

$\log_a a^n = n$

ÖRNEK

$\log_3(x - 1) = 2$ ise x kaçtır?

ÇÖZÜM

$x - 1 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 10$

Cevap: 10

3. Onluk ve Doğal Logaritma

$\log x = \log_{10} x$

$\ln x = \log_e x$, $e \approx 2,718$

$\log 10 = 1$ $\ln e = 1$

$\log 1 = 0$ $\ln 1 = 0$

ÖRNEK

$\log 1000 + \ln e^2 - \log_5 1 = ?$

ÇÖZÜM

$= 3 + 2 - 0 = 5$

Cevap: 5

4. En Geniş Tanım Kümesi

$f(x) = \log_{g(x)} h(x)$

Üç koşul birlikte sağlanmalı: **h(x) > 0** , **g(x) > 0** , **g(x) ≠ 1**.

ÖRNEK

$f(x) = \log_{(x-1)}(5 - x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde kaç tam sayı vardır?

ÇÖZÜM

$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

T.K. $= (1, 5) - \{2\} \rightarrow 3$ ve 4

Cevap: 2

5. Üstel ve Logaritma Fonksiyonu Birbirinin Tersidir

$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$

Ters fonksiyon bulunurken üstel ifade yalnız bırakılır, sonra logaritma alınır.

ÖRNEK

$f(x) = 3^{x-2} + 1$ ise $f^{-1}(10)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$y - 1 = 3^{x-2} \Rightarrow x - 2 = \log_3(y - 1)$

$f^{-1}(x) = 2 + \log_3(x - 1)$

$f^{-1}(10) = 2 + \log_3 9 = 4$

Cevap: 4

6. Logaritmanın Özellikleri (Çarpım, Bölüm, Üs)

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

Dikkat: log(x + y) ≠ log x + log y. Toplamın logaritması parçalanmaz.

ÖRNEK

$\log 25 + \log 40 = ?$

ÇÖZÜM

$= \log(25 \cdot 40) = \log 1000 = 3$

Cevap: 3

ÖRNEK

$\log 2 = a$, $\log 3 = b$ ise $\log 18 = ?$

ÇÖZÜM

$\log 18 = \log(2 \cdot 3^2) = \log 2 + 2 \log 3$

$= a + 2b$

Cevap: a + 2b

7. Taban Değiştirme ve Diğer Özellikler

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

ÖRNEK

$\log_3 5 \cdot \log_5 27 + 4^{\log_2 3} = ?$

ÇÖZÜM

$\log_3 5 \cdot \log_5 27 = \log_3 27 = 3$

$4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = 3^2 = 9 \rightarrow 3 + 9$

Cevap: 12

ÖRNEK

$\log 2 = a$ ise $\log_5 8 = ?$

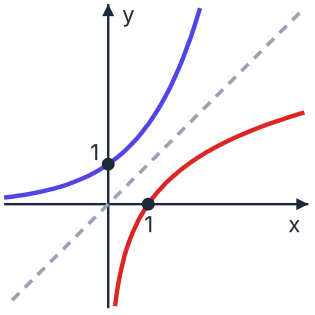
ÇÖZÜM

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - a$

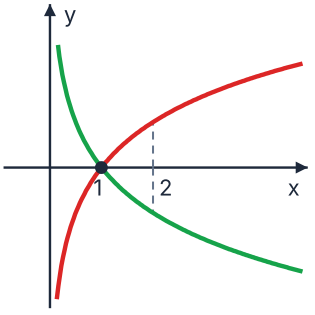
$\log_5 8 = \frac{3 \log 2}{\log 5} = \frac{3a}{1 - a}$

Cevap: 3a / (1 − a)

8. Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

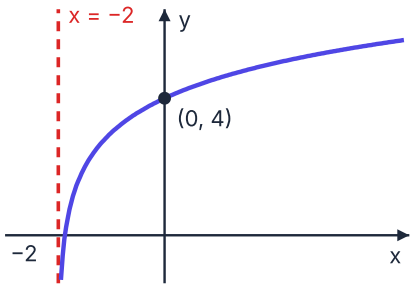


$y = 2^x$ $y = \log_2 x$ $y = x$



$y = \log_2 x$ (artan) $y = \log_{1/2} x$ (azalan)

- $y = \log_a x$, $y = a^x$ fonksiyonunun tersidir; grafikleri **y = x doğrusuna göre simetriktir**.
- Tanım kümesi $(0, \infty)$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$. Grafik hep **(1, 0)** noktasından geçer; y ekseni düşey asimptottur.
- $a > 1$ ise artan, $0 < a < 1$ ise azalandır. $y = \log_a(x - k) + m$ grafiği k birim sağa, m birim yukarı ötelenir; asimptot $x = k$ olur.



$y = \log_2(x + 2) + 3$ asimptot $x = -2$

ÖRNEK

$f(x) = \log_2(x + a) + b$ grafiğinin düşey asimptotu $x = -2$ ve grafik $(0, 4)$ noktasından geçiyor. $a + b$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Asimptot: $x + a = 0 \Rightarrow x = -a = -2 \Rightarrow a = 2$

$f(0) = \log_2 2 + b = 1 + b = 4 \Rightarrow b = 3$

$a + b = 2 + 3 = 5$

Cevap: 5

9. Üstel Denklemler

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

Tabanlar eşitlenir. Eşitlenemiyorsa iki tarafın logaritması alınır: $3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5$. Tekrar eden üstel ifadeye t denir (**t > 0**).

ÖRNEK

$9^x = 27^{x-1}$ ise x = ?

ÇÖZÜM

$3^{2x} = 3^{3x-3}$

$2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$

Cevap: 3

ÖRNEK

$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ ise x = ?

ÇÖZÜM

$2^x = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

t = 4 veya t = −1 (t > 0 olmalı, atılır)

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Cevap: 2

10. Logaritmalı Denklemler

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

Bulunan kökler mutlaka **tanım koşullarında** denetlenir; logaritmanın içini negatif ya da sıfır yapan kök atılır.

ÖRNEK

$\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$ ise x = ?

ÇÖZÜM

$x(x-2) = 2^3 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

x = 4 veya x = −2

Koşul $x > 2 \Rightarrow$ yalnız x = 4

Cevap: 4

ÖRNEK

$\log_3(\log_2 x) = 1$ ise x = ?

ÇÖZÜM

$\log_2 x = 3^1 = 3$

$x = 2^3 = 8$

Cevap: 8

11. Üstel ve Logaritmalı Eşitsizlikler

$a > 1 \Rightarrow$ yön **korunur**

$0 < a < 1 \Rightarrow$ yön **değişir**

Taban 1'den büyükse fonksiyon artan olduğu için eşitsizlik yönü aynı kalır; taban 0 ile 1 arasındaysa azalan olduğu için yön ters çevrilir. Logaritmada ayrıca **tanım koşulu** eklenir.

ÖRNEK

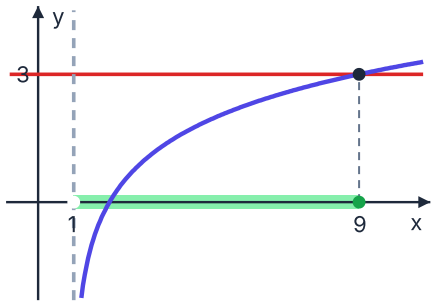
$(\frac{1}{2})^{x-1} > \frac{1}{8}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$(\frac{1}{2})^{x-1} > (\frac{1}{2})^{3}$; taban < 1, yön değişir

$x - 1 < 3 \Rightarrow x < 4$

Cevap: $(-\infty, 4)$



$y = \log_2(x-1)$ $y = 3$ çözüm aralığı

ÖRNEK

$\log_2(x - 1) < 3$ eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

ÇÖZÜM

Koşul: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Taban > 1, yön korunur: $x - 1 < 2^3 = 8 \Rightarrow x < 9$

$1 < x < 9 \rightarrow 2, 3, \ldots, 8$

Cevap: 7 tane

12. Logaritmanın Yaklaşık Değeri ve Basamak Sayısı

$\log 2 \approx 0{,}301$

$\log 3 \approx 0{,}477$

$\log 5 = 1 - \log 2 \approx 0{,}699$

$\log 7 \approx 0{,}845$

Aralık bulma: sayı, tabanın ardışık iki kuvveti arasına yerleştirilir. $2^4 = 16 < 20 < 32 = 2^5 \Rightarrow 4 < \log_2 20 < 5$.

$\log N = k$, … $\Rightarrow$ N sayısı $(k + 1)$ basamaklıdır

ÖRNEK

2^{30} sayısı kaç basamaklıdır? ($\log 2 \approx 0{,}301$)

ÇÖZÜM

$\log 2^{30} = 30 \cdot 0{,}301 = 9{,}03$

Tam kısım 9 $\Rightarrow$ 9 + 1 = 10 basamak

Cevap: 10

ÖRNEK

6^{10} kaç basamaklıdır? ($\log 2 \approx 0{,}301$, $\log 3 \approx 0{,}477$)

ÇÖZÜM

$\log 6^{10} = 10 \cdot (0{,}301 + 0{,}477)$

$= 7{,}78 \Rightarrow 7 + 1 = 8$ basamak

Cevap: 8

13. Gerçek Hayat Problemleri

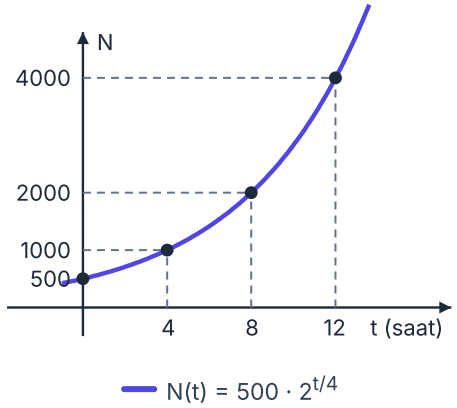
Büyüme: $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$

Yarı ömür: $m(t) = m_0 \cdot (\frac{1}{2})^{t/T}$

Bileşik faiz: $A = P \cdot (1 + r)^n$

$pH = -\log[H^+]$

N_o, m_o: başlangıç miktarı · T: iki katına çıkma (ya da yarıya inme) süresi · r: dönem faiz oranı · n: dönem sayısı



ÖRNEK

500 bakteri her 4 saatte iki katına çıkıyor. Kaç saat sonra sayı 4000 olur?

ÇÖZÜM

$500 \cdot 2^{t/4} = 4000 \Rightarrow 2^{t/4} = 8 = 2^3$

$\frac{t}{4} = 3 \Rightarrow t = 12$

Cevap: 12 saat

ÖRNEK

Yarı ömrü 6 yıl olan 160 g maddeden kaç yıl sonra 20 g kalır?

ÇÖZÜM

$160 \cdot (\frac{1}{2})^{t/6} = 20 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{t/6} = \frac{1}{8}$

$\frac{t}{6} = 3 \Rightarrow t = 18$

Cevap: 18 yıl

ÖRNEK

Bir çözeltide $[H^+] = 10^{-4}$ mol/L ise pH kaçtır? Asitlik 100 kat artarsa pH ne olur?

ÇÖZÜM

$pH = -\log 10^{-4} = 4$

$[H^+] = 10^{-2} \Rightarrow pH = 2$

Cevap: 4 ; 2