Mantık

1. Önerme ve Doğruluk Değeri

Kesin olarak **doğru ya da yanlış** hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir; p, q, r gibi harflerle gösterilir. Doğruysa p ≡ 1, yanlışsa p ≡ 0 yazılır.

Soru, emir, istek, ünlem cümleleri ve kişiye göre değişen (öznel) ifadeler önerme değildir.

ÖRNEK

Aşağıdakilerden hangileri önermedir? Önerme olanların doğruluk değeri nedir?

ÇÖZÜM

İfade	Önerme mi?	Değeri
7 bir asal sayıdır.	Evet	1
√2 bir rasyonel sayıdır.	Evet	0
Matematik en güzel derstir.	Hayır (öznel)	—
Kapıyı kapat!	Hayır (emir)	—

Cevap: 2 tanesi önermedir

2. Doğruluk Tablosu ve Denk Önermeler

n önerme için doğruluk tablosunda 2^n satır vardır

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Her önerme 1 ya da 0 olabildiğinden tüm durumlar listelenir: 1 önerme 2, 2 önerme 4, 3 önerme 8 satır. **Denk önermeler:** doğruluk değerleri aynı olan önermelerdir: p ≡ q. Konularının ilgisi olmasına gerek yoktur.

ÖRNEK

p: "3 > 2" , q: "$2^3 = 8$" , r: "5 bir çift sayıdır". Hangileri denktir?

ÇÖZÜM

p ≡ 1 , q ≡ 1 , r ≡ 0

Cevap: p ≡ q

3. Bir Önermenin Değili

p	p′
1	0
0	1

$(p')' \equiv p$

p önermesinin hükmü olumsuz yapılarak **değili (olumsuzu)** elde edilir: p′. Doğruluk değeri tersine döner.

Hüküm	=	<	≤	>	≥
Değili	≠	≥	>	≤	<

ÖRNEK

p: "x ≤ 3" , q: "6 bir tek sayıdır" önermelerinin değilleri?

ÇÖZÜM

p′: "x > 3"

q′: "6 bir tek sayı değildir" ≡ 1

Cevap: x > 3 ; q′ ≡ 1

4. "Ve" (∧) ile "Veya" (∨) Bağlaçları

p	q	p ∧ q	p ∨ q
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

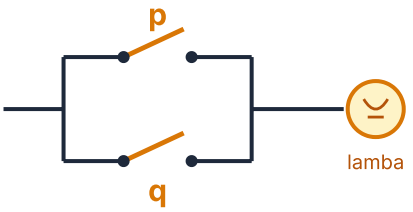
p ∧ q : yalnız **ikisi de 1** iken 1

p ∨ q : yalnız **ikisi de 0** iken 0

İki önerme "ve" ile bağlanırsa **p ∧ q**, "veya" ile bağlanırsa **p ∨ q** bileşik önermesi oluşur.



∧ : seri devre — p ve q ikisi de kapalıysa (1) lamba yanar



∨ : paralel devre — en az biri kapalıysa (1) lamba yanar

ÖRNEK

p ≡ 1 , q ≡ 0 , r ≡ 1 ise (p ∧ q) ∨ r ve (p′ ∨ q) ∧ r bileşik önermelerinin değerleri?

ÇÖZÜM

(1 ∧ 0) ∨ 1 ≡ 0 ∨ 1 ≡ 1

(0 ∨ 0) ∧ 1 ≡ 0 ∧ 1 ≡ 0

Cevap: 1 ; 0

5. "Ve", "Veya" Bağlaçlarının Özellikleri

p ∧ p ≡ p , p ∨ p ≡ p (tek kuvvet)

p ∧ q ≡ q ∧ p (değişme)

(p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ (q ∧ r) (birleşme)

p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) (dağılma)

p ∧ p′ ≡ 0 , p ∨ p′ ≡ 1

p ∧ 1 ≡ p , p ∨ 0 ≡ p , p ∧ 0 ≡ 0 , p ∨ 1 ≡ 1

p	q	(p ∧ q)′	p′ ∨ q′
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

(p ∧ q)′ ≡ p′ ∨ q′

(p ∨ q)′ ≡ p′ ∧ q′

De Morgan kuralı: değil parantezin içine dağıtılırken ∧ ile ∨ yer değiştirir. Tabloda sarı iki sütunun her satırda aynı olduğu görülür.

ÖRNEK

(p ∨ q) ∧ (p ∨ q′) ifadesinin en sade biçimi?

ÇÖZÜM

Dağılma: p ∨ (q ∧ q′) ≡ p ∨ 0

Cevap: p

ÖRNEK

(p ∧ q′)′ ∧ p ifadesinin en sade biçimi?

ÇÖZÜM

De Morgan: (p′ ∨ q) ∧ p ≡ (p′ ∧ p) ∨ (q ∧ p)

≡ 0 ∨ (q ∧ p)

Cevap: p ∧ q

6. Koşullu Önerme (⇒)

p	q	p ⇒ q	p′ ∨ q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

p ⇒ q : **yalnız 1 ⇒ 0** durumunda 0

p ⇒ q ≡ p′ ∨ q

"p ise q" önermesidir; p'ye **hipotez**, q'ya **hüküm** denir. Hipotez yanlışsa önerme her zaman doğrudur.

Önerme	Karşıtı	Tersi	Karşıt tersi
p ⇒ q	q ⇒ p	p′ ⇒ q′	**q′ ⇒ p′ ≡ p ⇒ q**

ÖRNEK

(p ⇒ q) ≡ 0 ise (q ⇒ p) ∧ (p ∨ q) önermesinin değeri?

ÇÖZÜM

1 ⇒ 0 tek yanlış durum: p ≡ 1 , q ≡ 0

(0 ⇒ 1) ∧ (1 ∨ 0) ≡ 1 ∧ 1

Cevap: 1

ÖRNEK

"x = 2 ise $x^2 = 4$" önermesinin karşıt tersini yazınız.

ÇÖZÜM

q′ ⇒ p′

Cevap: $x^2 \neq 4$ ise $x \neq 2$

7. İki Yönlü Koşullu Önerme (⇔)

p ⇔ q : değerler **aynı** ise 1, farklı ise 0

p	q	p ⇔ q	(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

p ⇔ q ≡ (p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p) ("p ancak ve ancak q")

ÖRNEK

"2 + 2 = 5 ancak ve ancak 3 bir çift sayıdır" önermesinin değeri?

ÇÖZÜM

0 ⇔ 0

Cevap: 1

ÖRNEK

p ≡ 1 ve (p ⇔ q′) ≡ 1 ise q ≡ ?

ÇÖZÜM

1 ⇔ q′ ≡ 1 ⇒ q′ ≡ 1

Cevap: q ≡ 0

8. Totoloji ve Çelişki

Totoloji: daima 1 · Çelişki: daima 0

Daima doğru olan bileşik önermeye **totoloji**, daima yanlış olana **çelişki** denir. Örn: p ∨ p′ totoloji, p ∧ p′ çelişkidir.

ÖRNEK

(p ∧ q) ⇒ p önermesi totoloji midir?

ÇÖZÜM

p	q	p ∧ q	(p ∧ q) ⇒ p
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Son sütunun bütün satırları 1

Cevap: Evet, totolojidir

ÖRNEK

p ∧ (p′ ∧ q) önermesi neyi gösterir?

ÇÖZÜM

(p ∧ p′) ∧ q ≡ 0 ∧ q ≡ 0

Cevap: Çelişki

9. Niceleyiciler: "Her" (∀) ve "Bazı" (∃)

İçinde değişken bulunan ve değişkene göre doğru ya da yanlış olan ifadelere **açık önerme** denir: p(x): "x + 3 = 5". Açık önerme niceleyici ile önermeye dönüşür.

∀x : "her x için"

$(\forall x, p(x))' \equiv \exists x, p'(x)$

∃x : "bazı x için / en az bir x için"

$(\exists x, p(x))' \equiv \forall x, p'(x)$

Değil alınırken "her" ↔ "bazı" yer değiştirir ve hüküm olumsuz yapılır. "Her" önermesinin yanlış olduğunu göstermek için tek bir aksine örnek yeterlidir.

ÖRNEK

"$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" önermesinin değeri ve değili?

ÇÖZÜM

Her reel sayının karesi negatif değildir ⇒ 1

Değili: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \equiv 0$

Cevap: 1 ; $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

ÖRNEK

"$\exists x \in \mathbb{N}, x + 3 = 1$" önermesinin değeri ve değili?

ÇÖZÜM

$x = -2$ doğal sayı değil ⇒ 0

Değili: $\forall x \in \mathbb{N}, x + 3 \neq 1 \equiv 1$

Cevap: 0 ; $\forall x \in \mathbb{N}, x + 3 \neq 1$

10. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat

- **Tanım:** bir kavramı belirleyen, açık ve kısa ifade. Örn: "İki kenarı eşit üçgene ikizkenar üçgen denir."
- **Aksiyom:** doğruluğu ispatsız kabul edilen önerme. Örn: "İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer."
- **Teorem:** doğruluğu ispatlanabilen önerme; p ⇒ q biçimindedir (p hipotez, q hüküm).
- **İspat:** teoremin doğruluğunu mantık kurallarıyla gösterme. Yöntemler: doğrudan ispat, olmayana ergi (çelişki), aksine örnek.

ÖRNEK

"İki tek sayının toplamı çifttir." teoremini ispatlayınız.

ÇÖZÜM

Tek sayılar $2a + 1$ ve $2b + 1$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Toplam: $2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$

Cevap: Çifttir (doğrudan ispat)

ÖRNEK

"Her asal sayı tek sayıdır." önermesi doğru mudur?

ÇÖZÜM

2 asal sayıdır ama çifttir: aksine örnek

Cevap: Yanlış (2 aksine örnek)