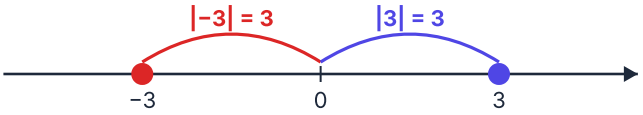
Mutlak Değer

1. Mutlak Değer Kavramı

$|x| = x \, , \, x \geq 0$

$|x| = -x \, , \, x < 0$



$|x|$, x'in sayı doğrusunda 0'a olan **uzaklığıdır**; $|a - b|$ ise a ile b arasındaki uzaklıktır.

Uzaklık negatif olamayacağı için **$|x| \geq 0$**'dır. İçerisi negatifse mutlak değer, içerinin **işaretini değiştirerek** dışarı çıkar.

ÖRNEK

$|5| - |-8| + |-2| \cdot |3| = ?$

ÇÖZÜM

$5 - 8 + 2 \cdot 3$

Cevap: 3

ÖRNEK

$|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 3| = ?$

ÇÖZÜM

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$: $1 - \sqrt{2} < 0$, $\sqrt{2} - 3 < 0$

$(\sqrt{2} - 1) + (3 - \sqrt{2})$

Cevap: 2

2. Mutlak Değerin Özellikleri

$|-x| = |x| \, , \, |x - y| = |y - x|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \, , \, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x^n| = |x|^n$

$|x| + |y| = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $y = 0$

Negatif olmayan ifadelerin (mutlak değer, çift kuvvet, karekök) toplamı 0 ise her biri ayrı ayrı 0'dır.

ÖRNEK

$|a - 3| + (b + 2)^2 + \sqrt{c - 1} = 0$ ise $a + b + c = ?$

ÇÖZÜM

$a - 3 = 0$, $b + 2 = 0$, $c - 1 = 0$

$3 + (-2) + 1$

Cevap: 2

ÖRNEK

$x < 0 < y$ ise $\sqrt{4x^2} + |y - x| - |y|$ ifadesinin eşiti?

ÇÖZÜM

$\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x$; $y - x > 0$

$-2x + y - x - y$

Cevap: $-3x$

3. İşaret İnceleyerek Sadeleştirme

Mutlak değerin içindeki ifadenin **işareti** verilen koşuldan (sıralama, aralık) bulunur. Pozitifse aynen, negatifse işaret değiştirerek dışarı çıkar.

ÖRNEK

$2 < x < 5$ ise $|x - 2| + |x - 5| = ?$

ÇÖZÜM

$x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$

$(x - 2) + (5 - x)$

Cevap: 3

ÖRNEK

$a < b < 0$ ise $|a - b| + |b| - |a| = ?$

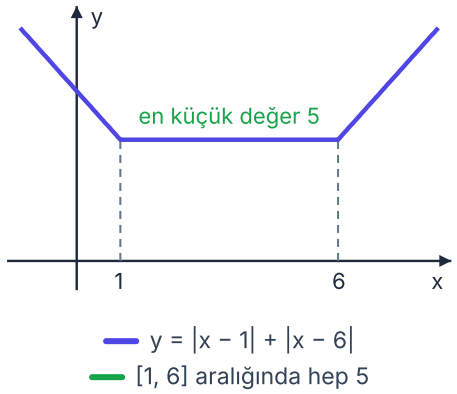
ÇÖZÜM

$a - b < 0 \Rightarrow |a - b| = b - a$; $|b| = -b$, $|a| = -a$

$(b - a) - b + a$

Cevap: 0

4. Mutlak Değerli İfadelerin En Küçük Değeri



- $|x - a|$ en küçük değerini (0) $x = a$'da alır.

$$|x - a| + |x - b| \geq |a - b|$$

- $|x - a| + |x - b|$ toplamı, x'in a ve b'ye uzaklıklarının toplamıdır; x, a ile b **arasındayken** en küçük olur ve değeri $|a - b|$'dir. Grafikte bu aralık yatay bir çizgidir.
- Katsayılı toplamlarda ($|x + 2| + |3x - 3|$ gibi) en küçük değer, köşe noktalarından (içi 0 yapan x'lerden) birinde alınır.

ÖRNEK

$|x - 1| + |x - 6|$ ifadesinin en küçük değeri ve bu değeri aldığı tam sayılar?

ÇÖZÜM

En küçük değer $|1 - 6| = 5$, $x \in [1, 6]$

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Cevap: 5 ; 6 tam sayı

ÖRNEK

$|x + 2| + |3x - 3|$ ifadesinin en küçük değeri?

ÇÖZÜM

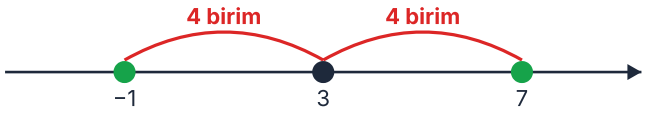
Köşeler: $x = -2 \Rightarrow 0 + 9 = 9$

$x = 1 \Rightarrow 3 + 0 = 3$

Cevap: 3

5. Mutlak Değerli Denklemler

$|x| = a\ (a \geq 0) \Rightarrow x = a$ veya $x = -a$



$|x - 3| = 4$: 3'e 4 birim uzaklıktaki sayılar

$|x| = |y| \Rightarrow x = y$ veya $x = -y$

- $a < 0$ ise $|x| = a$ denkleminin çözümü yoktur.
- $|f(x)| = g(x)$ denkleminde iki durum çözülür; bulunan köklerde **g(x) ≥ 0** olmalıdır, değilse kök atılır.

ÖRNEK

$|2x - 5| = 9$ ve $|x + 1| = |3x - 5|$ denklemlerinin çözüm kümeleri?

ÇÖZÜM

$2x - 5 = \pm 9 \Rightarrow x = 7\ ,\ x = -2$

$x + 1 = 3x - 5 \Rightarrow x = 3$; $x + 1 = -3x + 5 \Rightarrow x = 1$

Cevap: {−2, 7} ; {1, 3}

ÖRNEK

$|x - 4| = 2x + 1$ denkleminin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$x - 4 = 2x + 1 \Rightarrow x = -5$; ama $2x + 1 = -9 < 0$ ✕

$x - 4 = -2x - 1 \Rightarrow x = 1$; $2x + 1 = 3 \geq 0$ ✓

Cevap: {1}

6. Mutlak Değerli Eşitsizlikler

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

0'a uzaklığı a'dan **küçük** olanlar: iki sınır **arası**.

$a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ veya $-b \leq x \leq -a$ $(0 \leq a \leq b)$

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ veya $x > a$

0'a uzaklığı a'dan **büyük** olanlar: sınırların **dışı**.

ÖRNEK

$|3x - 1| < 8$ eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

ÇÖZÜM

$-8 < 3x - 1 < 8 \Rightarrow -7 < 3x < 9 \Rightarrow -\frac{7}{3} < x < 3$



$x = -2, -1, 0, 1, 2$

Cevap: 5

ÖRNEK

$|x + 3| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

ÇÖZÜM

$x + 3 \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$; $x + 3 \leq -5 \Rightarrow x \leq -8$



Cevap: (−∞, −8] ∪ [2, ∞)

ÖRNEK

$2 \leq |x - 1| < 4$ eşitsizliğini sağlayan tam sayılar?

ÇÖZÜM

$2 \leq x - 1 < 4 \Rightarrow 3 \leq x < 5$; $-4 < x - 1 \leq -2 \Rightarrow -3 < x \leq -1$

Cevap: −2, −1, 3, 4