Oran, Orantı ve Ortalamalar

1. Oran ve Orantı

Oran: $\frac{a}{b} = a : b \ (b \neq 0)$

Orantı: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Aynı birimdeki iki çokluğun oranı **birimsizdir**. İki ya da daha fazla oranın eşitliğine **orantı** denir; ortak değere **orantı sabiti (k)** denir: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

a : b : c = 2 : 3 : 4 ise a = 2k , b = 3k , c = 4k yazılır. 2a = 3b = 4c gibi eşitliklerde katsayıların EKOK'u alınır.

ÖRNEK

$\frac{a}{3} = \frac{b}{5}$ ve a + b = 24 ise a ve b?

ÇÖZÜM

a = 3k , b = 5k ⇒ 8k = 24 ⇒ k = 3

Cevap: a = 9 , b = 15

ÖRNEK

2a = 3b = 4c ve a + b + c = 26 ise a = ?

ÇÖZÜM

2a = 3b = 4c = 12k ⇒ a = 6k , b = 4k , c = 3k

13k = 26 ⇒ k = 2

Cevap: 12

2. Orantının Özellikleri

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ olsun:

$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k$

$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = k^2$

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{1}{k}$

$\frac{m \cdot a + n \cdot c}{m \cdot b + n \cdot d} = k$

$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = k^n$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (içler / dışlar yer değiştirebilir)

ÖRNEK

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ve a + b + c = 30 ise c = ?

ÇÖZÜM

$\frac{a+b+c}{2+3+5} = \frac{30}{10} = 3 = k$

c = 5 · 3

Cevap: 15

ÖRNEK

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3}$ ise $\frac{3a-c}{3b-d}$ ve $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ = ?

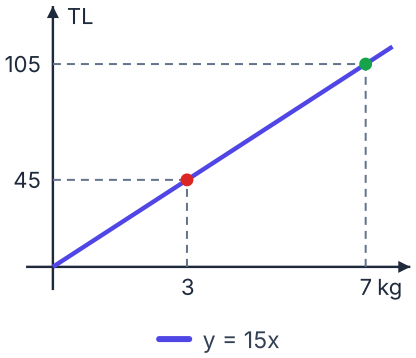
ÇÖZÜM

Pay ve payda aynı katsayılarla ⇒ $k = \frac{2}{3}$

Kareler ⇒ $k^2 = \frac{4}{9}$

Cevap: 2/3 ; 4/9

3. Doğru Orantı



$$y = k \cdot x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$$

Biri kaç katına çıkarken diğeri de **aynı kat** artıyorsa çokluklar **doğru orantılıdır**. Grafiği **orijinden geçen** bir doğrudur; k doğrunun eğimidir.

ÖRNEK

3 kg elma 45 TL ise 7 kg elma kaç TL'dir?

ÇÖZÜM

$\frac{45}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow k = 15 \Rightarrow y = 15 \cdot 7$

Cevap: 105 TL

ÖRNEK

Serbest düşen bir cismin aldığı yol, geçen sürenin karesiyle doğru orantılıdır. 2 saniyede 20 m düşen cisim 6 saniyede kaç m düşer?

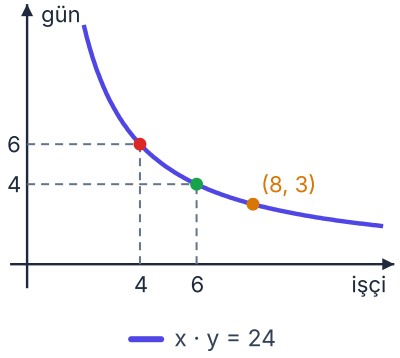
ÇÖZÜM

$h = k \cdot t^2$; süre 3 katına çıkınca h, $3^2 = 9$ katına çıkar

$20 \cdot 9$

Cevap: 180 m

4. Ters Orantı



$$x \cdot y = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$

Biri kaç katına çıkarken diğeri **aynı oranda azalıyorsa** çokluklar **ters orantılıdır**. Çarpımları sabittir; grafiği eksenlere yaklaşan bir eğridir. (Örn: işçi – gün, hız – zaman)

Şekilde her noktada işçi × gün = 24: $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$

ÖRNEK

6 işçi bir işi 10 günde bitiriyor. Aynı işi 4 işçi kaç günde bitirir?

ÇÖZÜM

$6 \cdot 10 = 4 \cdot x \Rightarrow 60 = 4x$

Cevap: 15 gün

ÖRNEK

Bir araç 60 km/sa hızla bir yolu 4 saatte alıyor. 80 km/sa hızla kaç saatte alır?

ÇÖZÜM

$60 \cdot 4 = 80 \cdot t \Rightarrow 240 = 80t$

Cevap: 3 saat

5. Bileşik Orantı

y, x ile doğru, z ile ters orantılı ⇒ $y = \frac{k \cdot x}{z}$

Üç ya da daha fazla çokluk arasındaki orantıdır. **İş problemlerinde**: işçi × saat/gün × gün = toplam iş (sabit) düşünülür.

ÖRNEK

4 işçi günde 6 saat çalışarak bir işi 10 günde bitiriyor. 5 işçi günde 8 saat çalışırsa aynı işi kaç günde bitirir?

ÇÖZÜM

Toplam iş: $4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$ (işçi·saat)

$5 \cdot 8 \cdot d = 240 \Rightarrow d = 6$

Cevap: 6 gün

ÖRNEK

(x + 1) sayısı y ile doğru, z ile ters orantılıdır. x = 5 için y = 4 , z = 2 ise y = 6 , z = 9 için x = ?

ÇÖZÜM

$x + 1 = \frac{k \cdot y}{z} \Rightarrow 6 = \frac{4k}{2} \Rightarrow k = 3$

$x + 1 = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2$

Cevap: 1

6. Orantılı Bölüştürme

a, b, c ile **doğru** orantılı: ak , bk , ck

a, b, c ile **ters** orantılı: $\frac{k}{a}$, $\frac{k}{b}$, $\frac{k}{c}$

Toplam miktar, payların toplamına bölünerek **bir payın değeri** bulunur. Ters orantıda paylar $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ 'dir; paydaların EKOK'u ile çarpılarak tam sayı yapılır.

ÖRNEK

720 TL, üç kişi arasında 2, 3 ve 4 sayılarıyla doğru orantılı paylaştırılıyor. Her biri kaç TL alır?

ÇÖZÜM



2 + 3 + 4 = 9 pay ⇒ 1 pay = 720 ÷ 9 = 80 TL

Cevap: 160 , 240 , 320 TL

ÖRNEK

720 TL, 2, 3 ve 6 sayılarıyla **ters** orantılı paylaştırılırsa en çok alan kaç TL alır?

ÇÖZÜM

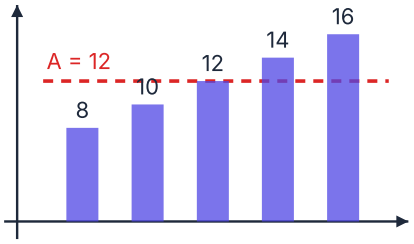
Paylar $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$; 6 ile çarp ⇒ 3 , 2 , 1



6 pay ⇒ 1 pay = 120 TL ; en büyük sayı (6) en az alır

Cevap: 360 TL

7. Aritmetik Ortalama



Ortalamanın üstündeki fazlalar, alttaki eksikleri tam kapatır.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\text{Toplam} = n \cdot A$$

- Her sayı k artırılırsa ortalama da k artar; her sayı k ile çarpılırsa ortalama da k ile çarpılır.
- **Ağırlıklı ortalama:** $\frac{n_1 \cdot A_1 + n_2 \cdot A_2}{n_1 + n_2}$ (grupların toplamları toplanıp kişi sayısına bölünür).

ÖRNEK

5 sayının ortalaması 12'dir. Bir sayı çıkarılınca kalan 4 sayının ortalaması 10 oluyor. Çıkarılan sayı?

ÇÖZÜM

$5 \cdot 12 = 60$; $4 \cdot 10 = 40$

$60 - 40$

Cevap: 20

ÖRNEK

20 kızın ortalaması 70, 30 erkeğin ortalaması 80'dir. Sınıfın ortalaması?

ÇÖZÜM

$$\frac{20 \cdot 70 + 30 \cdot 80}{50} = \frac{1400 + 2400}{50}$$

Cevap: 76

8. Geometrik ve Harmonik Ortalama

$G = \sqrt{a \cdot b}$; n sayı için $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$

$H = \frac{2ab}{a+b}$; n sayı için $H = n \div \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$

Pozitif sayılarda $A \geq G \geq H$

İki sayı için $G^2 = A \cdot H$

Eşitlik yalnızca sayılar eşitken olur. Harmonik ortalama "gidiş-dönüş ortalama hız" sorularında çıkar.

ÖRNEK

4 ve 9 sayılarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları?

ÇÖZÜM

$A = \frac{13}{2}$, $G = \sqrt{36} = 6$, $H = \frac{2 \cdot 36}{13} = \frac{72}{13}$

Kontrol: $A \cdot H = 6{,}5 \cdot 72/13 = 36 = G^2$

Cevap: 13/2 ; 6 ; 72/13

ÖRNEK

a ile b'nin aritmetik ortalaması 13, geometrik ortalaması 12 ise $a^2 + b^2 = ?$

ÇÖZÜM

$a + b = 26$, $ab = 144$

$a^2 + b^2 = 676 - 288$

Cevap: 388

ÖRNEK

Bir araç A'dan B'ye 60 km/sa, B'den A'ya 40 km/sa hızla gidiyor. Ortalama hızı kaç km/sa'tir?

ÇÖZÜM

Aynı yol, farklı hızlar ⇒ harmonik ortalama

$$\frac{2 \cdot 60 \cdot 40}{60 + 40} = \frac{4800}{100}$$

Cevap: 48 km/sa