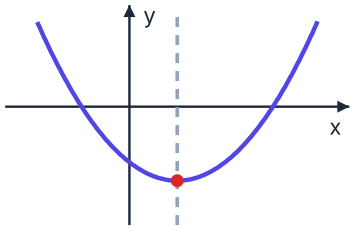
Parabol

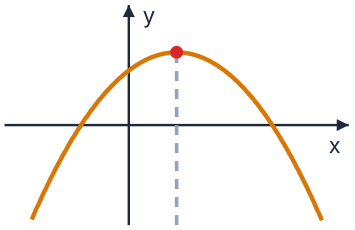
1. İkinci Dereceden Fonksiyon ve Parabol

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Grafiği **parabol**dür. Parabolün döndüğü noktaya **tepe noktası (T)**, T'den geçen düşey doğruya **simetri ekseni** (grafiklerde kesikli çizgi) denir.



a > 0 : kollar yukarı
T: en küçük değer



a < 0 : kollar aşağı
T: en büyük değer

ÖRNEK

$f(x) = (m + 1)x^{m-2} + 2x + 1$ ikinci dereceden fonksiyon ise $f(1)$ kaçtır?

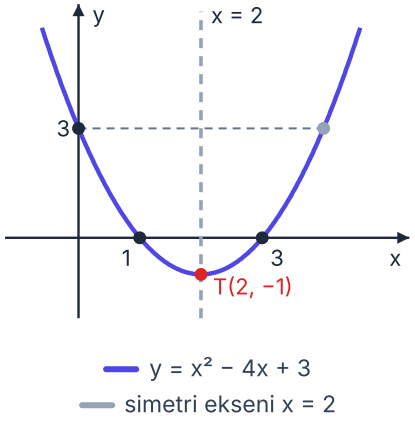
ÇÖZÜM

$m - 2 = 2 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow f(x) = 5x^2 + 2x + 1$

$f(1) = 5 + 2 + 1 = 8$

Cevap: 8

2. Tepe Noktası ve Simetri Ekseni



$y = x^2 - 4x + 3$
simetri ekseni $x = 2$

$$T(r, k) : r = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$k = f(r) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$f(x) = a(x - r)^2 + k$ (tepe biçimi)

Simetri ekseni **x = r** doğrusudur. Parabol üzerinde aynı yükseklikteki iki nokta bu eksene eşit uzaklıktadır; kökler de öyle: (1 + 3) / 2 = 2.

ÖRNEK

Bir parabol x eksenini −3 ve m apsisli noktalarda kesiyor. Simetri ekseni $x = 2$ ise m kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{-3 + m}{2} = 2 \Rightarrow m = 7$

Cevap: 7

ÖRNEK

$y = x^2 - 6x + 5$ parabolünün tepe noktası nedir?

ÇÖZÜM

$r = -\frac{-6}{2} = 3$

$k = 9 - 18 + 5 = -4$

Cevap: T(3, −4)

3. En Büyük ve En Küçük Değer

$a > 0 \Rightarrow$ en küçük değer k

$a < 0 \Rightarrow$ en büyük değer k

$\mathbb{R}$'de tanımlı parabol en küçük ya da en büyük değerini **tepe noktasında** alır. Fonksiyon **kapalı bir aralıkta** tanımlıysa tepe noktası ve aralığın **uç noktaları** birlikte karşılaştırılır.

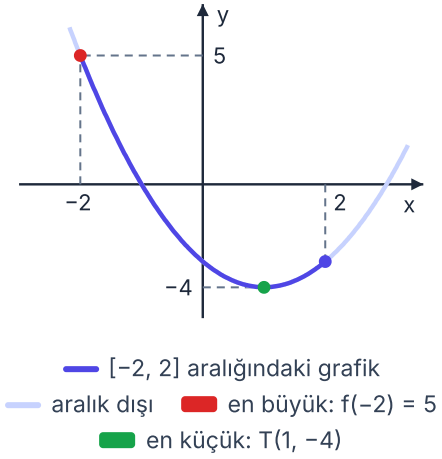
ÖRNEK

$g(x) = -2x^2 + 8x + 1$ fonksiyonunun en büyük değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$a < 0 \; ; \; r = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2 \Rightarrow g(2) = -8 + 16 + 1 = 9$$

Cevap: 9



ÖRNEK

$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerleri nedir?

ÇÖZÜM

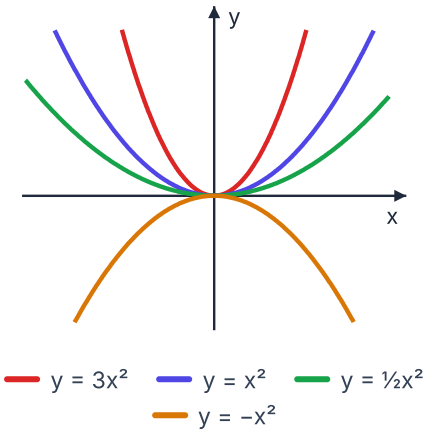
Tepe: $r = 1 \in [-2, 2]$, $f(1) = -4$

Uçlar: $f(-2) = 5$, $f(2) = -3$

En küçük -4 , en büyük 5

Cevap: 5 ve −4

4. y = ax² Parabolleri



$y = ax^2 \Rightarrow T(0, 0)$

- Tepe noktası orijindir, simetri ekseni y eksenidir.
- **|a| büyüdükçe** kollar y eksenine yaklaşır (parabol daralır); **|a| küçüldükçe** kollar açılır.
- $y = ax^2$ ile $y = -ax^2$, x eksenine göre simetriktir.

ÖRNEK

$y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -3x^2$ parabollerinden kolları en dar olan hangisidir?

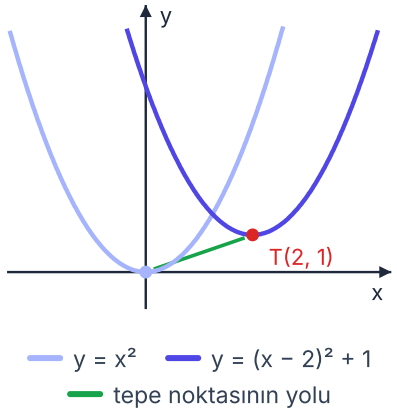
ÇÖZÜM

$|2| = 2$, $|\frac{1}{2}| = 0{,}5$, $|-3| = 3$

En büyük $|a| = 3$

Cevap: $y = -3x^2$

5. Parabolün Ötelenmesi



$$y = a(x - r)^2 + k$$

$y = ax^2$ parabolü **r birim sağa** ($r < 0$ ise sola) ve **k birim yukarı** ($k < 0$ ise aşağı) ötelenir; tepe noktası (0, 0)'dan **(r, k)**'ye gider. Kolların açıklığı (a) değişmez.

ÖRNEK

$y = x^2$ parabolü 3 birim sola, 2 birim aşağı ötelenirse yeni denklem nedir?

ÇÖZÜM

$r = -3$, $k = -2 \Rightarrow y = (x + 3)^2 - 2$

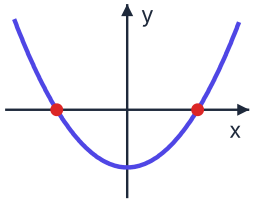
$y = x^2 + 6x + 7$

Cevap: $y = x^2 + 6x + 7$

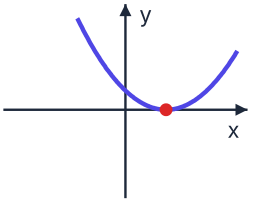
6. Eksenleri Kestiği Noktalar ve Diskriminant

y eksenini kestiği nokta: (0, c)

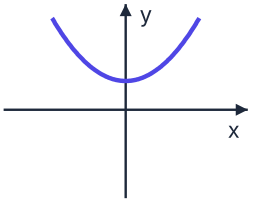
x eksenini kestiği noktalar: $ax^2 + bx + c = 0$



$\Delta > 0$: iki noktada keser



$\Delta = 0$: x eksenine teğet



$\Delta < 0$: kesmez

$\Delta = b^2 - 4ac$. Teğet durumunda değme noktası tepe noktasıdır: T(r, 0).

ÖRNEK

$y = x^2 - 6x + m$ parabolü x eksenine teğet ise m kaçtır?

ÇÖZÜM

$\Delta = 36 - 4m = 0 \Rightarrow m = 9$

Değme noktası T(3, 0)

Cevap: 9

ÖRNEK

$y = x^2 + 2x + m$ parabolü x eksenini kesmiyorsa m'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri?

ÇÖZÜM

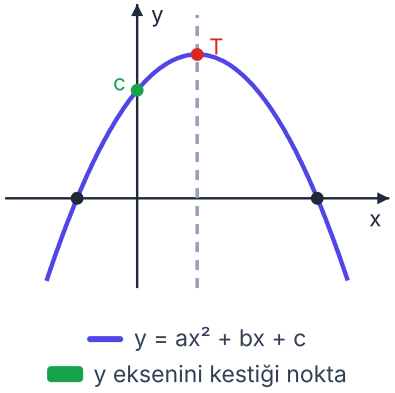
$\Delta = 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1$

Cevap: 2

7. Grafikten Katsayıların İşaretleri

- **a:** kollar yukarı ⇒ a > 0 , aşağı ⇒ a < 0
- **c:** y eksenini kestiği noktanın ordinatı
- **Δ:** x eksenini iki noktada kesiyorsa Δ > 0
- **b:** r = −b / 2a'dan bulunur. Tepe y ekseninin **sağında** (r > 0) ise a ile b **zıt**, **solunda** ise **aynı** işaretlidir.

Kökler toplamı −b/a, kökler çarpımı c/a ile de kontrol edilebilir.



ÖRNEK

Grafiği verilen parabolde a, b, c ve Δ'nın işaretleri nedir?

ÇÖZÜM

Kollar aşağı ⇒ a < 0

c (0, c) noktası pozitifte ⇒ c > 0

Tepe sağda: $r = -\frac{b}{2a} > 0$, a < 0 ⇒ b > 0

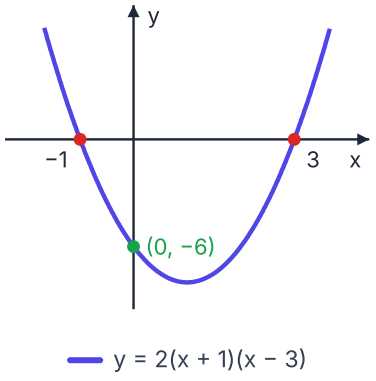
İki kök var ⇒ Δ > 0

Cevap: a −, b +, c +, Δ +

8. Parabolün Denklemini Yazma

Üç nokta biliniyorsa	Kökler (x_1, x_2) biliniyorsa	Tepe T(r, k) biliniyorsa
$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$y = a(x - r)^2 + k$

Her durumda a, parabol üzerindeki başka bir nokta yerine yazılarak bulunur.



ÖRNEK

Kökleri −1 ve 3 olan, (0, −6) noktasından geçen parabolün denklemi nedir?

ÇÖZÜM

y = a(x + 1)(x − 3) ; x = 0 ⇒ −6 = a · 1 · (−3)

a = 2 ⇒ $y = 2x^2 - 4x - 6$

Cevap: $y = 2x^2 - 4x - 6$

ÖRNEK

Tepe noktası T(1, 4) olan ve (3, 0) noktasından geçen parabol y eksenini nerede keser?

ÇÖZÜM

$y = a(x - 1)^2 + 4$; 0 = 4a + 4 ⇒ a = −1

x = 0 ⇒ y = −1 + 4 = 3

Cevap: (0, 3)

ÖRNEK

(0, 2), (1, 5) ve (−1, 3) noktalarından geçen parabolün denklemi nedir?

ÇÖZÜM

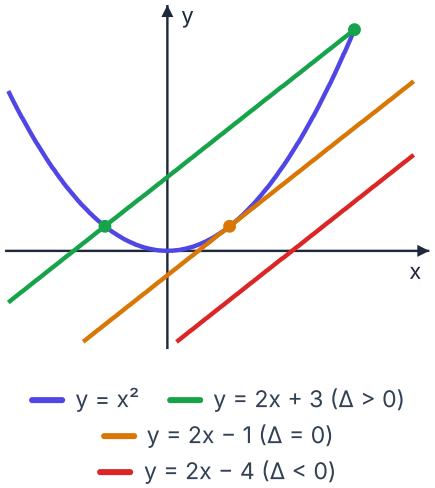
c = 2 ; a + b + 2 = 5 ; a − b + 2 = 3

a + b = 3 , a − b = 1 ⇒ a = 2 , b = 1

Cevap: $y = 2x^2 + x + 2$

9. Doğru ile Parabolün Durumu

$ax^2 + bx + c = mx + n \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$



Denklemler eşitlenir; elde edilen **ortak çözüm denkleminin** diskriminantına bakılır:

- **Δ > 0** ⇒ doğru parabolü **iki noktada keser**
- **Δ = 0** ⇒ doğru parabole **teğettir**
- **Δ < 0** ⇒ **kesişmezler**

Örn. $y = x^2$ ile $y = 2x - 1$: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0$, değme noktası (1, 1).

Kesim noktalarının apsisleri ortak çözüm denkleminin kökleridir; orta noktanın apsisi kökler toplamının yarısıdır.

ÖRNEK

$y = x^2 + 3x + 5$ parabolü ile $y = mx + 4$ doğrusu teğet ise m değerlerinin toplamı?

ÇÖZÜM

$x^2 + (3 - m)x + 1 = 0$; $\Delta = (3 - m)^2 - 4 = 0$

$3 - m = \pm 2 \Rightarrow m = 1$ veya $m = 5$

Cevap: 6

ÖRNEK

$y = x^2 - 5x + 4$ ile $y = x - 4$ doğrusu K ve L'de kesişiyor. [KL]'nin orta noktası?

ÇÖZÜM

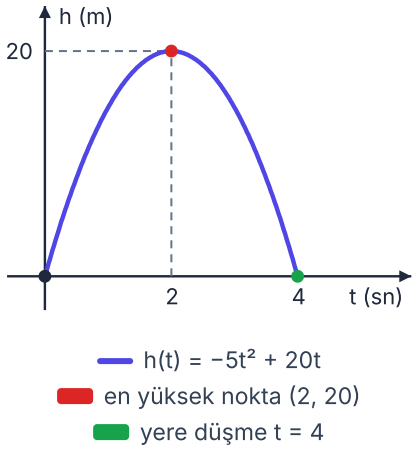
$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$, $x = 4$

$K(2, -2)$, $L(4, 0) \Rightarrow$ orta nokta $(3, -1)$

Cevap: (3, −1)

10. Gerçek Hayat Problemleri

Bir büyüklük ikinci dereceden bir ifadeyle modellenirse **en büyük / en küçük** değer tepe noktasından, **sıfır olduğu anlar** köklerden bulunur.



ÖRNEK

Yerden yukarı atılan topun t saniyedeki yüksekliği $h(t) = -5t^2 + 20t$ metredir. Top en fazla kaç metre yükselir, kaçıncı saniyede yere düşer?

ÇÖZÜM

Tepe: $t = -\dfrac{20}{2 \cdot (-5)} = 2 \Rightarrow h(2) = -20 + 40 = 20$

$h(t) = 0 \Rightarrow -5t(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 4$

Cevap: 20 m ; 4. sn

ÖRNEK

Bir kenarı duvar olan dikdörtgen bahçenin diğer üç kenarı 40 m telle çevrilecek. Bahçenin alanı en çok kaç m² olur?

ÇÖZÜM

Duvara dik kenarlar x ⇒ duvara paralel kenar $40 - 2x$

$A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$; tepe $x = 10$

$A(10) = 10 \cdot 20 = 200$

Cevap: 200 m²