Permütasyon ve Kombinasyon

1. Toplama Yoluyla Sayma

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow s(A \cup B) = s(A) + s(B)$

Seçenekler **ayrık** gruplardan geliyorsa ve yalnızca **birini** seçeceksek (**"veya"**), grupların eleman sayıları **toplanır**.

ÖRNEK

Rafta 4 tarih, 3 roman ve 2 şiir kitabı var. Okumak için 1 kitap kaç farklı şekilde seçilebilir?

ÇÖZÜM

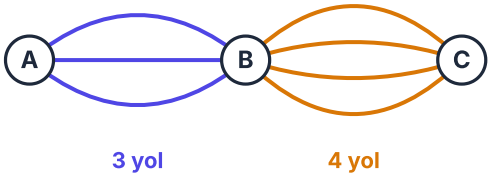
Tarih veya roman veya şiir: $4 + 3 + 2$

Cevap: 9

2. Çarpma Yoluyla Sayma

1. iş m yolla, 2. iş n yolla yapılıyorsa ikisi birlikte $m \cdot n$ yolla yapılır

İşler **art arda** ve **birlikte** yapılıyorsa (**"ve"**), her adımın seçenek sayısı **çarpılır**.



ÖRNEK

A'dan B'ye 3, B'den C'ye 4 farklı yol var. B'ye uğrayarak A'dan C'ye kaç farklı yolla gidilir?

ÇÖZÜM

A → B ve B → C: $3 \cdot 4$

Cevap: 12

3. Rakamlarla Sayı Yazma

Basamaklar birer kutu gibi düşünülür, her kutuya gelebilecek rakam sayısı yazılıp çarpılır. **Kısıtlı basamaktan** (en soldaki 0 olamaz, son basamak tek/çift olmalı...) başlanır.

ÖRNEK

{0, 2, 3, 5, 7} kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM

4	·	5	·	5
yüzler		onlar		birler

a) Rakamlar tekrar edebilir: yüzler basamağına 0 gelemez ⇒ $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

4	·	4	·	3
yüzler		onlar		birler

b) Rakamları farklı: yüzlerde 4, onlarda (0 dahil, kullanılan hariç) 4, birlerde 3 ⇒ 48

c) Rakamları farklı **çift** sayılar: birler 0 ise $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$; birler 2 ise $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

$12 + 9 = 21$

Cevap: 100 ; 48 ; 21

4. Faktöriyel

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$0! = 1$, $1! = 1$ $\qquad$ $n! = n \cdot (n-1)!$

Faktöriyelli kesirlerde büyük olan küçüğe kadar açılır: $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6!$

ÖRNEK

$$\frac{8! + 7!}{6!} = ?$$

ÇÖZÜM

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6! + 7 \cdot 6!}{6!} = 56 + 7$$

Cevap: 63

ÖRNEK

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \text{ ise } n = ?$$

ÇÖZÜM

$n(n-1) = 30 = 6 \cdot 5$

Cevap: 6

5. Permütasyon (Sıralama)

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ (r çarpan)

$P(n, n) = n!$ $\qquad$ $P(n, 1) = n$, $P(n, 0) = 1$

n farklı nesneden r tanesinin **sıralanmasıdır**; **sıra önemlidir**. Başkan–yardımcı–sözcü, 1.–2.–3., yan yana dizme gibi durumlar permütasyondur.

ÖRNEK

7 kişilik bir kulüpte bir başkan, bir yardımcı ve bir sözcü kaç farklı şekilde seçilir?

ÇÖZÜM

Görevler farklı, sıra önemli: $P(7, 3) = 7 \cdot 6 \cdot 5$

Cevap: 210

6. Kısıtlı Sıralamalar

Yan yana olsun:

Yan yana olacaklar **tek blok** sayılır; blok diğerleriyle sıralanır, sonra blok **kendi içinde** sıralanır.



A ile B tek blok: 4 birim

Yan yana olmasın:

Ya **tüm durumlar – yan yana olanlar** hesaplanır ya da diğerleri dizilip ayrı kalacaklar aradaki **boşluklara** yerleştirilir.



4 erkeğin arasında ve iki ucunda 5 boşluk

ÖRNEK

A, B, C, D, E bir sıraya dizilecek. A ile B yan yana olacak şekilde kaç farklı dizilir?

ÇÖZÜM

Blok + C + D + E: $4! = 24$

Blok içi AB, BA: $2! = 2 \Rightarrow 24 \cdot 2$

Cevap: 48

ÖRNEK

3 kız ve 4 erkek bir sıraya dizilecek. Hiçbir iki kız yan yana olmayacak şekilde kaç farklı dizilir?

ÇÖZÜM

Erkekler: $4! = 24$; 5 boşluğa 3 kız: $P(5, 3) = 60$

$24 \cdot 60$

Cevap: 1440

7. Tekrarlı Permütasyon

n nesneden n_1 tanesi aynı, n_2 tanesi aynı, … ise sıralama sayısı = $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}$

Aynı nesnelerin kendi aralarında yer değiştirmesi yeni bir sıralama oluşturmaz; bu yüzden aynıların faktöriyellerine bölünür.

ÖRNEK

KAVAK kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılır?

ÇÖZÜM

5 harf; K iki tane, A iki tane

$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4}$

Cevap: 30

ÖRNEK

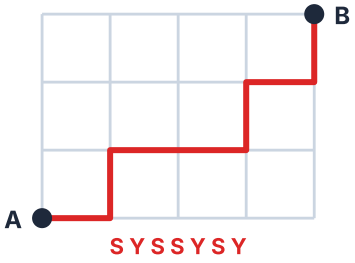
ANKARA kelimesinin harfleriyle kaç farklı kelime yazılır? Kaçı A ile başlar?

ÇÖZÜM

6 harf, 3 tane A: $\frac{6!}{3!} = 120$

A ile başlayan: kalan N K A R A ⇒ $\frac{5!}{2!} = 60$

Cevap: 120 ; 60



ÖRNEK

Şekildeki ızgarada A'dan B'ye yalnızca sağa (S) ve yukarı (Y) giderek kaç farklı en kısa yol vardır?

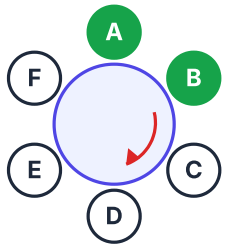
ÇÖZÜM

Her en kısa yol 4 S ve 3 Y'den oluşan bir dizilimdir.

7 harfli SSSSYYY dizilimi: $\frac{7!}{4! \cdot 3!}$

Cevap: 35

8. Dönel (Dairesel) Sıralama



n farklı nesne bir çember etrafında: (n − 1)!

Çemberde başlangıç noktası yoktur; herkes aynı yönde bir kaydırıldığında dizilim değişmez. Bu yüzden bir kişi sabitlenip diğerleri sıralanır.

Anahtarlık, kolye gibi ters çevrilebilen dizilimlerde (n − 1)! / 2 alınır.

ÖRNEK

6 kişi yuvarlak bir masaya kaç farklı şekilde oturur?

ÇÖZÜM

(6 − 1)! = 5!

Cevap: 120

ÖRNEK

6 kişi yuvarlak masaya A ile B yan yana olacak şekilde kaç farklı oturur?

ÇÖZÜM

AB blok: 5 birim ⇒ (5 − 1)! = 24

Blok içi 2! ⇒ 24 · 2

Cevap: 48

9. Kombinasyon (Seçme)

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

n farklı nesneden r tanesinin **seçilmesidir**; **sıra önemli değildir**. Ekip, grup, komisyon seçmek kombinasyondur.

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow a = b$ veya $a + b = n$

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$P(n, r) = r! \cdot C(n, r)$

ÖRNEK

$\binom{n}{2} = 28$ ise $n = ?$

ÇÖZÜM

$\frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \cdot 7$

Cevap: 8

ÖRNEK

$\binom{12}{x+1} = \binom{12}{2x-1}$ ise x'in alabileceği değerler?

ÇÖZÜM

$x + 1 = 2x - 1 \Rightarrow x = 2$

$(x + 1) + (2x - 1) = 12 \Rightarrow x = 4$

Cevap: 2 veya 4

10. Kombinasyon Problemleri

• Farklı gruplardan seçim yapılıyorsa her gruptaki seçimler **çarpılır**. • Durumlar ayrı ayrı inceleniyorsa sonuçlar **toplanır**.

• **"En az bir"** denince çoğu zaman **tümü – hiç olmayan** daha kısadır. • Belirli kişi **dahil** ise önceden seçilmiş sayılır, **hariç** ise listeden çıkarılır.

ÖRNEK

5 kız ve 4 erkek arasından 2 kız ve 2 erkekten oluşan kaç farklı ekip kurulur?

ÇÖZÜM

$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 10 \cdot 6$

Cevap: 60

ÖRNEK

5 kız ve 4 erkek arasından en az bir kız içeren 3 kişilik kaç ekip kurulur?

ÇÖZÜM

$\binom{9}{3} - \binom{4}{3} = 84 - 4$

Cevap: 80

ÖRNEK

10 kişiden 4 kişilik bir komisyon kurulacak. Ali komisyonda olacak, Veli olmayacak. Kaç farklı komisyon kurulur?

ÇÖZÜM

Ali seçildi, Veli çıkarıldı: kalan 8 kişiden 3 kişi $\Rightarrow \binom{8}{3}$

Cevap: 56

11. Geometride Kombinasyon

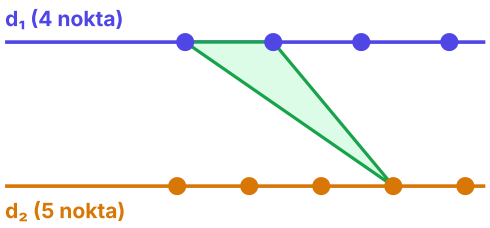
n noktadan (üçü doğrusal değil) doğru: $\binom{n}{2}$

üçgen: $\binom{n}{3}$

n kenarlı çokgenin köşegen sayısı: $\frac{n(n-3)}{2}$

k nokta doğrusalsa üçgen: $\binom{n}{3} - \binom{k}{3}$

Aynı doğru üzerindeki noktalardan üçgen oluşmaz; bu yüzden doğrusal üçlüler çıkarılır ya da üçgenin köşeleri iki doğrudan seçilir.



ÖRNEK

Paralel d_1 ve d_2 doğrularında 4 ve 5 nokta var. Köşeleri bu noktalar olan kaç üçgen çizilir?

ÇÖZÜM

d_1'den 2, d_2'den 1: $\binom{4}{2} \cdot 5 = 30$

d_1'den 1, d_2'den 2: $4 \cdot \binom{5}{2} = 40$

$30 + 40$

Cevap: 70

ÖRNEK

Sekizgenin kaç köşegeni vardır?

ÇÖZÜM

$$\frac{8 \cdot (8-3)}{2} = \frac{40}{2}$$

Cevap: 20