Polinomlar

1. Polinom Kavramı

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$n \in \mathbb{N}$ ve katsayılar gerçel sayıdır. Değişkenin **bütün üsleri doğal sayı** olmalıdır: $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, x^{-2} gibi terimler varsa ifade polinom değildir.

- **Derece:** en büyük üs, der[P(x)]
- **Baş katsayı:** en büyük dereceli terimin katsayısı
- **Sabit terim:** a_0 (değişken içermeyen terim)

ÖRNEK

$P(x) = 3x^{6/n} + x^{n-1}$ bir polinom ise n'nin alabileceği değerler toplamı?

ÇÖZÜM

$\frac{6}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 6\}$

$n - 1 \in \mathbb{N}$ hepsinde sağlanır $\Rightarrow 1 + 2 + 3 + 6$

Cevap: 12

ÖRNEK

$P(x) = (2x - 1)^3 + 4x^2$ polinomunun derecesi, baş katsayısı ve sabit terimi?

ÇÖZÜM

$(2x)^3 = 8x^3 \Rightarrow$ derece 3, baş katsayı 8

$x = 0 \Rightarrow (-1)^3 + 0 = -1$

Cevap: 3 ; 8 ; −1

2. Katsayılar Toplamı ve Sabit Terim

Katsayılar toplamı = $P(1)$

Sabit terim = $P(0)$

Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı = $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$

Tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı = $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$

$P(x + 2)$ gibi verilmişse içerisi 1 (ya da 0) yapılır: $P(1)$ için $x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$ yazılır.

ÖRNEK

$P(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 5$ ise $P(x)$'in katsayılar toplamı ve sabit terimi?

ÇÖZÜM

$P(1)$: $x = -1 \Rightarrow -1 + 2 - 5 = -4$

$P(0)$: $x = -2 \Rightarrow -8 + 8 - 5 = -5$

Cevap: −4 ; −5

ÖRNEK

$P(x) = (x^2 - x + 2)^4$ polinomunda çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı?

ÇÖZÜM

$P(1) = 2^4 = 16$, $P(-1) = 4^4 = 256$

$\frac{16 + 256}{2}$

Cevap: 136

3. Sabit, Sıfır ve Eşit Polinomlar

- **Sabit polinom:** P(x) = c , c ≠ 0 ; derecesi 0.
- **Sıfır polinomu:** P(x) = 0 ; bütün katsayılar 0, derecesi tanımsız.
- **Eşit polinomlar:** aynı dereceli terimlerin katsayıları karşılıklı eşittir.

P(x) = ax + b sabit polinom ise a = 0 olmalıdır.

ÖRNEK

$(a-2)x^2 + (b+1)x + c - 3$ sıfır polinomu ise $a + b + c = ?$

ÇÖZÜM

$a - 2 = 0$, $b + 1 = 0$, $c - 3 = 0$

$a = 2$, $b = -1$, $c = 3$

Cevap: 4

ÖRNEK

$(a+1)x^2 + 3x + b = 4x^2 + (c-2)x + 5$ ise $a + b + c = ?$

ÇÖZÜM

$a + 1 = 4$, $3 = c - 2$, $b = 5$

$a = 3$, $c = 5$, $b = 5$

Cevap: 13

4. Polinomlarda İşlemler ve Derece

Toplama/çıkarmada **aynı dereceli** terimlerin katsayıları toplanır/çıkarılır. Çarpmada her terim diğer polinomun her terimiyle çarpılır. der P = m , der Q = n (m > n) ise:

$\text{der}[P \pm Q] = m$

$\text{der}[P^k] = k \cdot m$

$\text{der}[P(kx)] = m$

$\text{der}[P \cdot Q] = m + n$

$\text{der}[P(Q(x))] = m \cdot n$

$\text{der}\left[\frac{P}{Q}\right] = m - n$ (kalansız ise)

ÖRNEK

$(2x-1)(x^2 + 3x - 2)$ çarpımı nedir?

ÇÖZÜM

$2x^3 + 6x^2 - 4x - x^2 - 3x + 2$

Cevap: $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

ÖRNEK

der P = 3 , der Q = 2 ise $\text{der}[P(x^2) \cdot Q(x)]$ ve $\text{der}[P(Q(x))]$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$P(x^2)$: $3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow 6 + 2 = 8$

$P(Q(x))$: $3 \cdot 2 = 6$

Cevap: 8 ; 6

5. Polinomlarda Bölme

$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + K(x)$, der K < der B

der Q = der P − der B

K(x) = 0 ise P(x), B(x)'e tam bölünür

Bölme, bölünenin en büyük dereceli terimi bölenin en büyük dereceli terimine bölünerek yapılır; çarpılıp **çıkarılır**, kalanın derecesi bölenden küçük olana kadar devam edilir.

	x^3	$-2x^2$	$+4x$	-5	$x-1$
$-$	x^3	$-x^2$			x^2-x+3
		$-x^2$	$+4x$		bölüm
$-$		$-x^2$	$+x$		
			$3x$	-5	
$-$			$3x$	-3	
				-2	kalan

ÖRNEK

$(x^3 - 2x^2 + 4x - 5) \div (x - 1)$ bölümünü ve kalanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^3 \div x = x^2$; $-x^2 \div x = -x$; $3x \div x = 3$

Bölüm $x^2 - x + 3$, kalan -2

Horner ile kısa yol (bölen x − 1 ⇒ 1 yazılır; katsayı aşağı indirilir, 1 ile çarpılıp sonraki katsayıya eklenir):

x = 1	1	−2	4	−5
		1	−1	3
sonuç	1	−1	3	−2

Cevap: $Q = x^2 - x + 3$, $K = -2$

6. Kalan Bulma

$P(x) \div (x - a) \Rightarrow$ kalan $P(a)$

$P(x) \div (ax + b) \Rightarrow$ kalan $P(-\frac{b}{a})$

• Bölen ikinci dereceden ise kalan **mx + n** biçimindedir. • Bölen $x^n + k$ ise polinomda **x^n yerine $-k$** yazılır.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - 4x^2 + ax + 5$ polinomunun x − 2 ile bölümünden kalan 3 ise a = ?

ÇÖZÜM

$P(2) = 8 - 16 + 2a + 5 = 3$

$2a - 3 = 3$

Cevap: 3

ÖRNEK

$P(x) = x^5 + 3x^3 - x + 2$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan?

ÇÖZÜM

$x^2 = -1 \Rightarrow x^5 = x \cdot (x^2)^2 = x$, $3x^3 = -3x$

$x - 3x - x + 2$

Cevap: $-3x + 2$

ÖRNEK

P(x)'in x − 1 ile bölümünden kalan 5, x + 2 ile bölümünden kalan 2'dir. P(x)'in (x − 1)(x + 2) ile bölümünden kalan nedir?

ÇÖZÜM

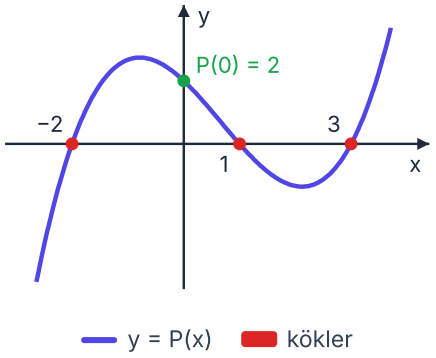
Kalan $K(x) = mx + n$; $P(1) = m + n = 5$, $P(-2) = -2m + n = 2$

$3m = 3 \Rightarrow m = 1$, $n = 4$

Cevap: x + 4

7. Polinomun Kökleri ve Çarpanları

$P(a) = 0 \Leftrightarrow$ a bir köktür $\Leftrightarrow (x - a)$ bir çarpandır



- Kökler, grafiğin **x eksenini kestiği** noktaların apsisleridir.
- Kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve baş katsayısı a olan polinom: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$
- $P(x)$, $(x - a)(x - b)$ ile tam bölünüyorsa $P(a) = 0$ ve $P(b) = 0$'dır.

Grafikteki polinom: $P(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(x - 1)(x - 3)$

ÖRNEK

$P(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$ polinomunun bir kökü 2 ise a = ?

ÇÖZÜM

$P(2) = 8 + 4a - 2 - 2 = 0$

$4a + 4 = 0$

Cevap: −1

ÖRNEK

Baş katsayısı 1 olan üçüncü dereceden P(x)'in kökleri −1, 2 ve 3 ise P(0) = ?

ÇÖZÜM

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

$P(0) = 1 \cdot (-2) \cdot (-3)$

Cevap: 6

8. Çarpanlara Ayırma: Ortak Çarpan ve Gruplandırma

$ab + ac = a(b + c)$

Her terimde bulunan ortak çarpan (sayı ve değişkenin en küçük kuvveti) paranteze alınır.

ÖRNEK

$6x^2y - 9xy^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

Ortak çarpan 3xy

Cevap: 3xy(2x − 3y)

$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y)$

Terimler ikişerli gruplanır; her gruptan ortak çarpan alınınca ortaya çıkan aynı parantez dışarı alınır.

ÖRNEK

$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

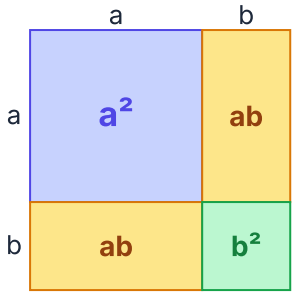
ÇÖZÜM

$x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9)$

$x^2 - 9$ iki kare farkı

Cevap: (x − 2)(x − 3)(x + 3)

9. Özdeşlikler



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Sık kullanılan: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

ÖRNEK

$101^2 - 99^2 = ?$

ÇÖZÜM

$(101 - 99)(101 + 99) = 2 \cdot 200$

Cevap: 400

ÖRNEK

$x + \frac{1}{x} = 4$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

ÇÖZÜM

$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16$

Cevap: 14

ÖRNEK

$x - y = 2$ ve $xy = 3$ ise $x^3 - y^3 = ?$

ÇÖZÜM

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

$= 8 + 3 \cdot 3 \cdot 2$

Cevap: 26

ÖRNEK

$a + b = 5$ ve $ab = 3$ ise $a^2 + b^2 = ?$

ÇÖZÜM

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$= 25 - 6$

Cevap: 19

ÖRNEK

$4x^2 - 12x + 9$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2$ tam kare

Cevap: $(2x-3)^2$

ÖRNEK

$x^3 + 27$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 3^2)$

Cevap: $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

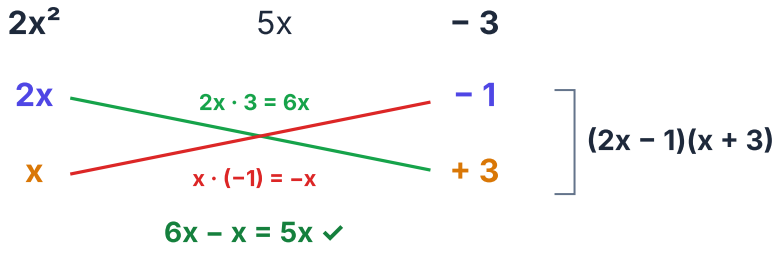
10. Üç Terimli İfadeleri Çarpanlarına Ayırma

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$

Çarpımı **c**, toplamı **b** olan iki sayı (m, n) bulunur.

$ax^2 + bx + c$

Çapraz çarpım: ax^2 ve c ikişer çarpana ayrılır; çapraz çarpımların toplamı bx olmalıdır.



ÖRNEK

$x^2 - 5x - 14$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

Çarpımı −14, toplamı −5: −7 ve 2

Cevap: $(x - 7)(x + 2)$

ÖRNEK

$6x^2 - x - 2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$6x^2 = 2x \cdot 3x$, $-2 = 1 \cdot (-2)$

Çapraz: $2x \cdot (-2) + 3x \cdot 1 = -x$ ✓

Cevap: $(2x + 1)(3x - 2)$

ÖRNEK

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$ ifadesini çarpanlarına ayırınız. (Değişken değiştirme)

ÇÖZÜM

$x^2 + x = t \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6)$

$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)$

Cevap: $(x + 2)(x - 1)(x + 3)(x - 2)$

11. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

Pay ve payda çarpanlarına ayrılır, **ortak çarpanlar** sadeleştirilir. Sadeleştirme yalnızca **çarpım** durumundaki çarpanlar arasında yapılır; toplamdaki terimler sadeleşmez. Paydayı sıfır yapan değerler ifadenin tanım kümesine alınmaz.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$ ifadesinin sadeleşmiş biçimi?

ÇÖZÜM

$\dfrac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)}$

$x \neq -3$, $x \neq 2$

Cevap: $(x - 3) / (x - 2)$

ÖRNEK

$\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} = ?$

ÇÖZÜM

$\dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 4}$

Cevap: 1