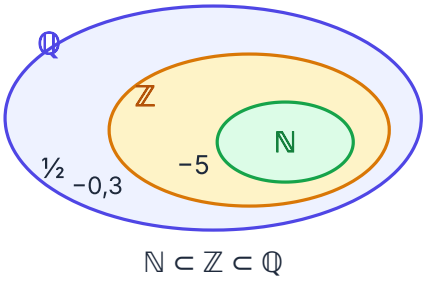
Rasyonel Sayılar

1. Rasyonel Sayı Kavramı



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} , b \neq 0 \}$$

a ve b tam sayı, b ≠ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılara **rasyonel sayı** denir. Doğal sayılar, tam sayılar, sonlu ondalıklar ve devirli ondalıklar rasyoneldir.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Paydası 0 olan ifade tanımsızdır. $\sqrt{2}$, π gibi kesir biçiminde yazılamayan sayılar **irrasyoneldir**.

ÖRNEK

$\frac{x+3}{x-5}$ ifadesi hangi x değeri için rasyonel sayı belirtmez?

ÇÖZÜM

Payda 0 olamaz: $x - 5 = 0$

Cevap: x = 5

ÖRNEK

$0 , -7 , 0{,}25 , \sqrt{9} , \sqrt{2}$ sayılarından hangileri rasyoneldir?

ÇÖZÜM

$\sqrt{9} = 3$; $0{,}25 = \frac{1}{4}$

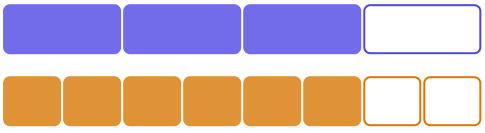
$\sqrt{2}$ kesir olarak yazılamaz

Cevap: √2 dışındakiler

2. Sayı Doğrusunda Gösterim ve Denk Kesirler

Kesir önce tam sayılı biçime çevrilir: hangi iki tam sayı arasında olduğu bulunur, o aralık **payda kadar eş parçaya** bölünür ve pay kadar ilerlenir. Negatif sayılar 0'ın soluna doğru sayılır.





3/4

6/8

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \ (k \neq 0)$$

Pay ve payda aynı sayıyla çarpılırsa (**genişletme**) ya da bölünürse (**sadeleştirme**) kesrin değeri değişmez.

ÖRNEK

$\frac{36}{48}$ kesrini sadeleştiriniz; $4\frac{2}{7}$ sayısını bileşik kesre çeviriniz.

ÇÖZÜM

36 ve 48'in EBOB'u 12 ⇒ $\frac{3}{4}$

$4 \cdot 7 + 2 = 30 \Rightarrow \frac{30}{7}$

Cevap: 3/4 ; 30/7

ÖRNEK

$\frac{17}{5}$ kesrini tam sayılı yazınız ve hangi iki tam sayı arasında olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$17 = 3 \cdot 5 + 2 \Rightarrow 3\frac{2}{5}$

Cevap: 3 2/5 ; 3 ile 4

3. Ondalık Gösterim

Payda 10, 100, 1000... yapılabiliyorsa genişletilir; yapılamıyorsa pay paydaya bölünür. Sadeleşmiş kesrin paydasında **yalnızca 2 ve 5** çarpanı varsa ondalık açılım **sonludur**; başka asal çarpan varsa **devirlidir**.

ÖRNEK

$\frac{7}{20}$, $\frac{3}{8}$ ve $-\frac{11}{4}$ sayılarının ondalık gösterimi?

ÇÖZÜM

$\frac{35}{100} = 0{,}35$; $\frac{375}{1000} = 0{,}375$

$-\frac{275}{100} = -2{,}75$

Cevap: 0,35 ; 0,375 ; −2,75

ÖRNEK

$\frac{5}{12}$ sayısının ondalık açılımı sonlu mudur?

ÇÖZÜM

$12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow$ paydada 3 var

$5 \div 12 = 0{,}41666\ldots$

Cevap: Devirli: $0{,}41\overline{6}$

4. Devirli Ondalık Sayıyı Kesre Çevirme

$$\frac{\text{(Sayının tamamı)} - \text{(Devretmeyen kısım)}}{\text{Devreden basamak kadar 9 , devretmeyen ondalık basamak kadar 0}}$$

Virgül yok sayılarak sayının tamamından, devretmeyen kısım çıkarılır. Paydaya virgülden sonra devreden her basamak için bir 9, devretmeyen her basamak için bir 0 yazılır.

Özel durum: $0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$. Devirli ondalık sayılar da rasyoneldir.

ÖRNEK

$3{,}\overline{12}$ sayısını rasyonel sayı olarak yazınız.

ÇÖZÜM

$\frac{312 - 3}{99} = \frac{309}{99}$

Cevap: 103/33

ÖRNEK

$0{,}2\overline{3}$ sayısını rasyonel sayı olarak yazınız.

ÇÖZÜM

$\frac{23 - 2}{90} = \frac{21}{90}$

Cevap: 7/30

5. İki Rasyonel Sayı Arasındaki Sayılar

İki farklı rasyonel sayı arasında **sonsuz çoklukta** rasyonel sayı vardır (rasyonel sayılar **yoğundur**). Arada sayı bulmak için kesirler, aralarında yeterince sayı kalacak biçimde **genişletilir**; ya da iki sayının ortalaması alınır.

ÖRNEK

$\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{2}$ arasında 3 rasyonel sayı yazınız.

ÇÖZÜM

$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$, $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$

Arada: $\frac{9}{24}$, $\frac{10}{24}$, $\frac{11}{24}$

Cevap: 9/24 , 10/24 , 11/24

ÖRNEK

0,4 ile 0,5 arasında bir rasyonel sayı yazınız.

ÇÖZÜM

Ortalama: $\frac{0{,}4 + 0{,}5}{2}$

Sonsuz seçenek var: 0,41 ; 0,42 ; 0,4999 ...

Cevap: 0,45

6. Rasyonel Sayılarla İşlemler

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \; ; \; \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Toplama-çıkarmada paydalar **EKOK**'ta eşitlenir. Bölmede ikinci kesir ters çevrilip çarpılır. İşlem önceliği: parantez → üs → çarpma/bölme → toplama/çıkarma. **Merdivenli** kesirlerde en alttaki işlemden başlanır.

ÖRNEK

$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = ?$

ÇÖZÜM

EKOK 12: $\frac{8 - 3 + 10}{12} = \frac{15}{12}$

Cevap: 5/4

ÖRNEK

$1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = ?$

ÇÖZÜM

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$

$1 + \frac{2}{3}$

Cevap: 5/3

7. Rasyonel Sayıları Sıralama

• **Paydalar eşitse** payı büyük olan büyüktür. • **Paylar eşitse** paydası küçük olan büyüktür.
• Pay ile payda arasındaki fark aynıysa (5/6, 7/8 gibi) **1'e daha yakın** olan, yani sayıları büyük olan daha büyüktür.
• Negatif sayılarda önce pozitifleri sıralanır, sonra sıra **ters çevrilir**.

ÖRNEK

$a = \frac{11}{12}$, $b = \frac{9}{10}$, $c = \frac{13}{14}$ sıralaması?

ÇÖZÜM

1'e uzaklıklar: $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$

1'e en uzak b, en yakın c

Cevap: b < a < c

ÖRNEK

$-\frac{3}{4}, -\frac{5}{7}, -\frac{2}{3}$ sayılarını sıralayınız.

ÇÖZÜM

Pozitifler: $\frac{2}{3} \approx 0{,}67 < \frac{5}{7} \approx 0{,}71 < \frac{3}{4} = 0{,}75$

Negatiflerde sıra ters

Cevap: −3/4 < −5/7 < −2/3

ÖRNEK

$\frac{2}{5} < \frac{x}{20} < \frac{3}{4}$ koşulunu sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

ÇÖZÜM

Paydaları 20 yap: $\frac{8}{20} < \frac{x}{20} < \frac{15}{20}$

$8 < x < 15 \Rightarrow x = 9, 10, \ldots, 14$

Cevap: 6