Türev

1. Ortalama Değişim Oranı

$$\text{Ortalama değişim} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

[a, b] aralığında fonksiyonun **ortalama hızı**dır. Grafikte A(a, f(a)) ve B(b, f(b)) noktalarından geçen doğrunun eğimine eşittir.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 3x$ fonksiyonunun [1, 4] aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(4) = 4,\ f(1) = -2$

$$\frac{4 - (-2)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Cevap: 2

2. Türevin Tanımı

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Bu limit bir reel sayıysa f, x = a'da **türevlidir**. Türev, x = a'daki **anlık değişim oranı**dır.

ÖRNEK

$f(x) = x^2$ ise tanımı kullanarak $f'(3)$'ü bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

Cevap: 6

3. Temel Türev Kuralları

$(c)' = 0$ (c sabit)

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

Örn: $(x^5)' = 5x^4 \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

ÖRNEK

$f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3x - 7$ ise $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 8x^3 - 10x + 3$

$f'(1) = 8 - 10 + 3 = 1$

Cevap: 1

4. İkinci Türev

$f'(x)$'in türevi **ikinci türev**dir: $f''(x)$. Aynı şekilde $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$... bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$ ise $f''(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$

$f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow f''(2) = 4$

Cevap: 4

5. Çarpımın ve Bölümün Türevi

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

ÖRNEK

$f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$ ise $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1)$

$f'(1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

Cevap: 8

ÖRNEK

$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$ ise $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = \frac{2(x - 3) - (2x + 1)}{(x - 3)^2}$

$f'(2) = \frac{-2 - 5}{1} = -7$

Cevap: −7

6. $[f(x)]^n$ ve Köklü İfadenin Türevi

$([f(x)]^n)' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

ÖRNEK

$f(x) = (x^2 - 3)^4$ ise $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 4(x^2 - 3)^3 \cdot 2x$

$f'(2) = 4 \cdot 1^3 \cdot 4 = 16$

Cevap: 16

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{(x^2 + 9)}$ ise $f'(4)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{(x^2 + 9)}}$

$f'(4) = \frac{8}{2 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

Cevap: 4/5

7. Bileşke Fonksiyonun Türevi (Zincir Kuralı)

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Önce dış fonksiyonun türevi alınır (içi aynen kalır), sonra içteki fonksiyonun türeviyle çarpılır.

ÖRNEK

$g(x) = x^2 + 1$ ve $f'(5) = 3$ ise $(f \circ g)'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$

$g(2) = 5, g'(x) = 2x \Rightarrow g'(2) = 4$

$= f'(5) \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$

Cevap: 12

8. Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$

Zincirle: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$, $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

ÖRNEK

$f(x) = x \cdot \sin x$ ise $f'(\pi)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$

$f'(\pi) = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi$

Cevap: –π

ÖRNEK

$f(x) = \tan 2x$ ise $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2(1 + \tan^2 2x)$

$x = \frac{\pi}{8} : \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 2(1 + 1) = 4$

Cevap: 4

9. Türev – Süreklilik İlişkisi

x = a'da **türevli ⇒ sürekli**. Tersi her zaman doğru değil: $f(x) = |x|$ fonksiyonu x = 0'da süreklidir ama türevi yoktur (**köşe** noktası).

Süreksiz olduğu noktada fonksiyonun türevi **yoktur**.

Türev var ⇔ sürekli ve sağdan türev = soldan türev

10. Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonun Türevi

Kritik noktada türev için iki şart: ① o noktada süreklilik, ② sağdan ve soldan türevlerin eşitliği. Mutlak değerde, içi sıfır yapan noktada genelde köşe oluşur.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b\,, & x < 1 \\ 4x - 1\,, & x \geq 1 \end{cases}$$

x = 1'de türevli ise a ve b kaçtır?

ÇÖZÜM

Süreklilik: $a + b = 3$

Türevler: $2a \cdot 1 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b = 1$

Cevap: a = 2, b = 1

ÖRNEK

$f(x) = |x^2 - 4|$ ise $f'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

x = 3 civarında $x^2 - 4 > 0$

$f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f'(3) = 6$

x = ±2'de türev yoktur (köşe).

Cevap: 6

11. Türevin Geometrik Yorumu: Teğet ve Normal

Teğetin eğimi: $m = f'(a) = \tan \alpha$

Normalin eğimi: $-\frac{1}{f'(a)}$

Teğet denklemi: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

Normal, teğete değme noktasında **dik** olan doğrudur. Teğet x eksenine paralelse $f'(a) = 0$'dır.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ eğrisine $x = 2$ noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

ÇÖZÜM

$f(2) = 3$, $f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(2) = 2$

$y - 3 = 2(x - 2)$

$y = 2x - 1$

Cevap: $y = 2x - 1$

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 12x$ eğrisinin teğetinin x eksenine paralel olduğu noktaların apsisleri?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2, x = 2$

Cevap: −2 ve 2

12. Rolle Teoremi

f, [a, b]'de **sürekli**, (a, b)'de **türevli** ve **f(a) = f(b)** ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır.

Yani grafikte bu aralıkta yatay teğetli en az bir nokta bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ için [1, 5]'te Rolle teoremini sağlayan c değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(1) = 0 = f(5)$ ✓, polinom sürekli ve türevli ✓

$f'(c) = 2c - 6 = 0 \Rightarrow c = 3$

Cevap: 3

13. Artan ve Azalan Fonksiyonlar

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ f artan

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ f azalan

$f'(x) = 0$ denkleminin kökleri bulunur, $f'(x)$'in işaret tablosu yapılır.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$

Kökler: -1 ve 3. İşaret: $+ \cdot - \cdot +$

Artan: $(-\infty, -1)$ ve $(3, \infty)$ · Azalan: $(-1, 3)$

Cevap: Artan $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$, azalan $(-1,3)$

14. Ekstremum Noktaları

f'(c) = 0 ve f'in işareti c'de değişiyorsa x = c'de **yerel ekstremum** vardır.

+ → − : yerel maksimum	− → + : yerel minimum

İkinci türev testi: f'(c) = 0 ve f''(c) < 0 ⇒ maks.; f''(c) > 0 ⇒ min.

Kapalı aralıkta mutlak en büyük/en küçük değer için kritik noktalardaki değerlerle **uç noktalardaki** değerler karşılaştırılır.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ fonksiyonunun yerel maksimum ve minimum değerleri?

ÇÖZÜM

Kritik noktalar: $x = -1$ ve $x = 3$ (13. bölüm)

$x = -1$: + → − ⇒ yerel maks.

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$

$x = 3$: − → + ⇒ yerel min.

$f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$

Cevap: Maks. 6, min. −26

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığındaki en büyük ve en küçük değerleri?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ($x = -1$ aralıkta değil)

$f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$

En büyük 2, en küçük −2

Cevap: 2 ve −2

15. Maksimum – Minimum Problemleri

1. Büyüklüğü tek değişkenli bir fonksiyon olarak yaz. **2.** Türevini sıfıra eşitle. **3.** Bulunan değerin uygun olduğunu (tanım aralığı, işaret) kontrol et.

ÖRNEK

Çevresi 40 cm olan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın alanı kaç cm^2'dir?

ÇÖZÜM

Kenarlar x ve $20 - x$

$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

$A'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$

$A = 10 \cdot 10 = 100$

Cevap: 100 cm^2

ÖRNEK

Kenarı 12 cm olan kare kartonun köşelerinden x cm'lik kareler kesilip üstü açık kutu yapılıyor. Hacim en çok kaç cm^3'tür?

ÇÖZÜM

$V(x) = x(12 - 2x)^2$, $0 < x < 6$

$V'(x) = (12 - 2x)(12 - 6x) = 0$

$x = 2 \Rightarrow V = 2 \cdot 8^2 = 128$

Cevap: 128 cm^3