Üslü İfadeler

1. Üslü Sayı ve Temel Özellikler

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n tane a)

$a^1 = a$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $1^n = 1$

$(-1)^{\text{çift}} = 1$, $(-1)^{\text{tek}} = -1$

n	1	2	3	4	5	6
$(-2)^n$	−2	4	−8	16	−32	64

Negatif tabanın **çift** kuvveti pozitif, **tek** kuvveti negatiftir. Pozitif tabanın her kuvveti pozitiftir.

Dikkat: $-3^2 = -(3^2) = -9$, $(-3)^2 = 9$

Parantez yoksa üs yalnızca hemen önündeki sayıya etki eder. 0^0 tanımsızdır.

ÖRNEK

$(-2)^4 - 2^4 + (-1)^{2027} + 5^0 = ?$

ÇÖZÜM

$16 - 16 + (-1) + 1$

Cevap: 0

2. Negatif Üs ve Kuvvetin Kuvveti

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^{(m^n)} \neq (a^m)^n$ (örn. $2^{3^2} = 2^9$, $(2^3)^2 = 2^6$)

Negatif üs, sayının **çarpmaya göre tersini** alır; işareti değiştirmez: $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (−8 değil).

ÖRNEK

$2^{-3} + (\frac{1}{4})^{-1} - (\frac{2}{3})^{-2} = ?$

ÇÖZÜM

$\frac{1}{8} + 4 - \frac{9}{4} = \frac{1 + 32 - 18}{8}$

Cevap: 15/8

3. Çarpma ve Bölme

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Tabanlar farklıysa önce **aynı tabana** (genellikle asal sayılara) çevrilir: $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $0{,}25 = 2^{-2}$.

ÖRNEK

$\frac{8^3 \cdot 4^5}{16^4} = ?$

ÇÖZÜM

$\frac{2^9 \cdot 2^{10}}{2^{16}} = 2^{9+10-16}$

Cevap: 8

ÖRNEK

$3^x = a$ ise 9^{x+1} ifadesinin a türünden eşiti?

ÇÖZÜM

$9^{x+1} = 9 \cdot (3^2)^x = 9 \cdot (3^x)^2$

Cevap: $9a^2$

4. Toplama ve Çıkarma

$x \cdot a^n + y \cdot a^n - z \cdot a^n = (x + y - z) \cdot a^n$

Yalnızca **tabanı ve üssü aynı** olan terimler toplanır. Üsleri farklıysa **en küçük kuvvet ortak çarpan** olarak dışarı alınır: $3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 3^x(9 + 3 - 1) = 11 \cdot 3^x$.

ÖRNEK

$\frac{5^{12} + 5^{11}}{5^{11} - 5^{10}} = ?$

ÇÖZÜM

$\frac{5^{11}(5+1)}{5^{10}(5-1)} = \frac{5 \cdot 6}{4}$

Cevap: 15/2

ÖRNEK

$4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5$ toplamı 2'nin kaçıncı kuvvetidir?

ÇÖZÜM

$4 \cdot 4^5 = 4^6 = (2^2)^6$

Cevap: 2^{12}

5. Bilimsel Gösterim ve Basamak Sayısı

$a \cdot 10^n \; (1 \le |a| < 10 \; , \; n \in \mathbb{Z})$

Virgül sola kaydıkça 10'un kuvveti artar, sağa kaydıkça azalır: $52\,000\,000 = 5{,}2 \cdot 10^7$; $0{,}00034 = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$.

Basamak sayısı: sayı $a \cdot 10^n$ (a tam sayı) biçimine getirilir; basamak sayısı = a'nın basamak sayısı + n. 2 ile 5 kuvvetleri eşleştirilerek 10 oluşturulur.

ÖRNEK

$2^{12} \cdot 5^{10}$ sayısı kaç basamaklıdır?

ÇÖZÜM

$2^2 \cdot (2 \cdot 5)^{10} = 4 \cdot 10^{10}$

$1 + 10$

Cevap: 11

ÖRNEK

$\frac{0{,}003 \cdot 4000}{0{,}02}$ işleminin sonucunu bilimsel gösterimle yazınız.

ÇÖZÜM

$\frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-2}} = \frac{12}{2 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^2$

Cevap: $6 \cdot 10^2$

6. Üslü Denklemler

$a^x = a^y \Rightarrow x = y$ $(a \neq 0, a \neq \pm 1)$

$a^n = b^n \Rightarrow$ n tek: $a = b$; n çift: $a = \pm b$

$a^n = 1$ eşitliğinin üç durumu		
n = 0 ve a ≠ 0	a = 1 (n her değer)	a = −1 ve n çift

ÖRNEK

$8^{x-1} = 4^{x+1}$ ise x = ?

ÇÖZÜM

$2^{3x-3} = 2^{2x+2}$

$3x - 3 = 2x + 2$

Cevap: 5

ÖRNEK

$3^{x+1} + 3^x = 36$ ise x = ?

ÇÖZÜM

$3^x(3 + 1) = 36 \Rightarrow 3^x = 9$

Cevap: 2

ÖRNEK

$(x - 2)^{x+3} = 1$ eşitliğini sağlayan x değerleri?

ÇÖZÜM

Üs 0: x = −3 (taban −5 ≠ 0 ✓) ; Taban 1: x = 3

Taban −1: x = 1 , üs 4 çift ✓

Cevap: {−3, 1, 3}

7. Üslü Eşitsizlikler ve Sıralama

$a > 1 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

$0 < a < 1 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

Sıralama: sayılar ya **aynı tabana** getirilip üsleri, ya da **aynı üsse** getirilip tabanları karşılaştırılır (üslerin EBOB'u kullanılır).

ÖRNEK

$x = 2^{60}$, $y = 3^{40}$, $z = 5^{20}$ sayılarını sıralayınız.

ÇÖZÜM

Üsler 20'nin katı: $x = (2^3)^{20} = 8^{20}$, $y = (3^2)^{20} = 9^{20}$

$5^{20} < 8^{20} < 9^{20}$

Cevap: z < x < y

ÖRNEK

$(\frac{1}{3})^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ eşitsizliğini sağlayan en büyük x tam sayısı?

ÇÖZÜM

$(\frac{1}{3})^{2x-1} \geq (\frac{1}{3})^3$; taban < 1, yön değişir

$2x - 1 \leq 3 \Rightarrow x \leq 2$

Cevap: 2